Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 3.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1 (Китайская теорема об остатках)**.** Найдите все решения системы сравнений

$$x \equiv 5 \pmod 8, \quad x \equiv 2 \pmod 7, \quad x \equiv 3 \pmod{15}.$$

Задача 2 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$ и набора значений $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}$ найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, которые принимают значение a_i в точке x_i при $i = 1,\ldots,n$.

Задача 3. Найдите все неприводимые многочлены степени 5 с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 4. Найдите число неприводимых многочленов степени 2 с коэффициентами в $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Задача 5. Докажите, что многочлен $x^n - p$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$ для любого простого p.

Задача 6 (*)**.** Докажите, что простых чисел вида
(1) $4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$;
(2) $4k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$
бесконечно много.

Задача 7 (*)**.** Какие натуральные числа представимы в виде суммы двух полных квадратов?

Задача 8 (*)**.** Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ — многочлен с комплексными коэффициентами. Назовём его *производной* многочлен

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Докажите, что нули производной лежат внутри или на границе многоугольника с вершинами в корнях многочлена.

Задача 9 (*)**.** Определим *целые числа Гурвица* как кватернионы $a + bi + cj + dk$, где либо a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ либо $a - \frac{1}{2}$, $b - \frac{1}{2}$, $c - \frac{1}{2}$, $d - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$. Докажите, что целые числа Гурвица образуют некоммутативное евклидово кольцо (где есть правое и левое деление с остатком).

Задача 10 (*)**.** Какие натуральные числа представимы в виде суммы четырёх полных квадратов?