

Механика и теория поля 2013.

Листок 2. Релятивистская механика

1. Тележка катится по столу с постоянной скоростью v . По тележке в том же направлении катится вторая тележка со скоростью v относительно первой. По второй тележке катится третья с той же скоростью v относительно второй и так далее. Определите скорость n -й тележки.

2. Зеркало движется перпендикулярно своей плоскости с постоянной скоростью v относительно источника света. Какой угол с плоскостью зеркала образует отраженный луч света, если падающий луч направлен под углом θ к нормали зеркала? Углы измеряются в системе покоя источника света.

3. Линейный базис в алгебре Ли группы Лоренца задается шестью инфинитезимальными поворотами $L^{\mu\nu}$, $0 \leq \mu < \nu \leq 3$, затрагивающими по две из четырех координат пространства Минковского: x^μ и x^ν . Постройте матрицы $L^{\mu\nu}$ и выразите коммутаторы $[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}]$ в виде линейных комбинаций матриц L .

Алгебра Ли группы Пуанкаре вдобавок к $L^{\mu\nu}$ имеет еще четыре базисных элемента P^μ , $0 \leq \mu \leq 3$, отвечающих трансляциям вдоль координатных осей x^μ . Найдите коммутаторы элементов $L^{\mu\nu}$ и P^ρ .

4. Фотон частоты ν налетает на покоящийся электрон массы m и после столкновения движется под углом θ к направлению своего исходного импульса (явление комптоновского рассеяния). Докажите, что частота ν' рассеянного фотона выражается формулой:

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

где c – скорость света, а h – постоянная Планка, которая связывает энергию фотона E с его частотой квантовомеханической формулой $E = h\nu$.

5. Покоящийся нейтрон претерпевает, так называемый, β -распад, одним из продуктов которого является электрон. В системе покоя нейтрона направления вылета электрона равновероятны, а модуль скорости электрона равен v . В эксперименте наблюдают β -распад нейтрона, который движется относительно лаборатории со скоростью u . Какие значения вектора импульса \vec{p} испущенного нейтроном электрона можно зарегистрировать в лаборатории? Имеются в виду модуль $|\vec{p}|$ и угол θ относительно направления полета нейтрона.

6. Какую кинетическую энергию необходимо придать двум протонам, чтобы стала возможной реакция рождения антипротона: $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$? Решите задачу в двух случаях:

а) один из взаимодействующих протонов является мишенью, т.е., он неподвижен перед столкновением;

б) реагируют встречные пучки протонов, т.е., протоны налетают друг на друга со скоростями, одинаковыми по величине и противоположными по направлению.

7. Проведите сравнительный анализ трех динамических систем, задаваемых функционалами действия

$$\text{а) } S[\vec{x}(t)] = -mc^2 \int \sqrt{1 - \dot{\vec{x}}^2/c^2} dt, \quad \text{б) } S[x^\mu(\tau)] = -mc \int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}} d\tau,$$

$$\text{в) } S[x^\mu(\tau), e(\tau)] = \int \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} / e + Te \right) d\tau,$$

где m , c и T – константы; \vec{x} , x^μ , e – динамические переменные; t – реальное время ($x^0 = ct$); τ – формальный параметр вдоль мировой линии частицы $x^\mu(\tau)$.

Сравните уравнения движения и законы сохранения в этих моделях.