Вербицкий Михаил Сергеевич

1 курс.

1. Докажите теорему Тихонова о метризации (любое нормальное топологическое пространство со счетной базой метризуемо). Пользуйтесь литературой.

2. Докажите теорему Островского: любая норма на Q эквивалентна архимедовой либо p-адической. Пользуйтесь литературой.

3. "Тело" есть ассоциативная алгебра с делением. Докажите, что конечное тело коммутативно. По возможности, придумайте свое доказательство.

4. Постройте счетное, связное хаусдорфово топологическое пространство. Может ли оно быть компактно? Решение лучше поискать в литературе (Гуглем, например), самостоятельно найти такую штуку будет трудно.

5. Постройте естественную топологию и метрику на группе изометрий метрического пространства. Докажите, что группа изометрий компактного метрического пространства компактна.

%%%

2 курс.

1. Локально-конечная группа - группа, любая конечно-порожденная подгруппа в которой конечна. Универсальная группа Халла есть локально-конечная группа G, обладающая следующим свойством: для любой конечной группы H, H допускает вложение в G, причем это вложение единственно с точностью до внутреннего автоморфизма. Докажите существование и единственность универсальной группы Халла.

2. Аменабельная группа есть группа G, снабженная инвариантной аддитивной положительной мерой на кольце всех подмножеств (можно считать, что мера G равна 1). Докажите, что Z^n аменабельна, а свободная группа F_n от двух и более образующих не аменабельна. Докажите, что группа, содержащая F_2, не аменабельна.

3. Докажите "альтернативу Титса": если группа Ли не разрешима, она содержит свободную группу F_2. Решение поищите в литературе, если не получается.

4. Определим группу, свободно порожденную классами конгруэнтных треугольников на плоскости Лобачевского, и профакторизуем по соотношению $A = \sum A_i$, если треугольник A разбит в объединение треугольников A_i, пересекающихся по границам. Найдите, какая группа получится.

5. Пусть на кольце Q рациональных чисел задана метрика d, причем сложение и умножение непрерывны в d, а пополнение Q по d связно и локально компактно. Докажите, что эта метрика задает вещественную топологию.

6. Постройте нетривиальное комплексно-аналитическое отображение из $\C^2$ в $\C^2\backslash \Z^4$. Пользуйтесь статьей Баззарда и Лу: http://arxiv.org/abs/math/9903193, "Algebraic surfaces holomorphically dominable by C^2".

7. Докажите неравенство Бишопа-Громова: на римановом многообразии с кривизной Риччи, которая ограниченна константой C, риманов объем шара радиуса R ограничен римановым объемом шара разиуса R в пространстве постоянной кривизны с кривизной Риччи C. Литература: Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, Riemannian Geometry.

%%%

3-4 курс.

1. Если вы не знаете определение орбиобразия, найдите в литературе. Определите неразветвленное накрытие орбиобразий. Найдите все двумерные орбиобразия, не допускающие неразветвленных, гладких накрытий (указание: все они рода 0 и 1). Решение этой задачи можно поискать в Гугле, спросить у кого-нибудь, либо сделать самостоятельно.

2. Пусть G -- компактная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой g_0. Решите уравнение потока Риччи $g_t' = - 2\Ric(g_t)$ в классе левоинвариантных метрик. Найдите, к чему сходится.

3. Плоское аффинное многобразие есть фактор открытого подмножества U в R^n по дискретной группе аффинных преобразований. Геодезическая плоского аффинного многообразия есть образ прямой из U. Докажите, что каждое плоское аффинное компактное многообразие содержит плотную геодезическую. Ответ на этот вопрос мне неизвестен, и науке, похоже, тоже неизвестен, хотя во всех примерах задача делается.

4. Комплексное нильмногообразие есть фактор нильпотентной группы Ли, снабженной левоинвариантной комплексной структурой, по дискретной кокомпактной подгруппе. Постройте комплексное нильмногообразие, которое не имеет нетривиальных комплексных подмногообразий, и не изоморфно тору. Этот результат науке неизвестен, и его можно опубликовать.