Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 4.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Через $\mathbb{F}$ обозначается поле.

Задача 1. Найдите все пары изоморфных колец в следующем списке:
(1) $\mathbb{R}$, (2) $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, (3) $\mathbb{C}$, (4) $\mathbb{R}[x]/(x)$, (5) $\mathbb{R}[x]/(x^2)$, (6) $\mathbb{R}[x]/(x^2-1)$, (7) $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.

Задача 2. Для вещественной 2×2-матрицы A определим кольцо $\mathbb{R}[A]$ как подкольцо в кольце вещественных 2×2-матриц, состоящее из всех многочленов от A с вещественными коэффициентами. Найдите все пары изоморфных колец в следующем списке:

$$(1)\ \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right],\quad (2)\ \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right],\quad (3)\ \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right],\quad (4)\ \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right],\quad (5)\ \mathbb{R}\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right].$$

Каким кольцам из задачи 1 изоморфны эти кольца?

Задача 3 (Китайская теорема об остатках)**.** Представьте в виде прямой суммы полей следующие кольца вычетов:
(а) $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$;
(б) $\mathbb{R}[x]/(x^3-1)$.

Задача 4. Найдите ненулевой многочлен $f\in\mathbb{Z}[x]$ минимальной степени, такой что $f(\sqrt{2}+\sqrt[3]{2})=0$.

Задача 5. Определим функцию Эйлера $\varphi(n)$ от натурального аргумента n, как число вычетов по модулю n, которые взаимно просты с n. Докажите, что если m и n взаимно просты, то

$$\varphi(m)\varphi(n)=\varphi(mn).$$

Задача 6. Вычислите $\varphi(p^k)$ для всех простых чисел $p\in\mathbb{N}$ и натуральных k.

Задача 7. Найдите такие рациональные числа a, b и c, что

$$(2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^{-1}=a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}.$$

Задача 8. Пусть $f\in\mathbb{F}[x]$ — многочлен. Докажите, что кольцо вычетов $\mathbb{F}[x]/(f)$ по модулю f является полем тогда и только тогда, когда f неприводим.

Задача 9. Для вещественной 2×2-матрицы $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ найдите ненулевой многочлен $f\in\mathbb{R}[x]$ минимальной степени, такой что $f(A)=0$.

Задача 10 (*)**.** Решите в целых числах уравнение Пелля

$$x^2-2y^2=1.$$