Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 2.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения обсуждаются на семинарах.

Через $\mathbb{F}$ обозначается поле.

Задача 1. Для каждой пары целых чисел m и n, найдите их наибольший общий делитель d и целые числа x и y, такие что $d = mx + ny$:

(1) $n = 20$, $m = 13$;

(2) $n = 126$, $m = 91$;

(3) $n = 77695236973$, $m = 6003722857$ (алгоритм Евклида для этих чисел заканчивается за 3 шага).

Задача 2. Найдите наибольший общий делитель многочленов $x^3 - 6x^2 + x + 4$ и $x^5 - 6x + 1$.

Задача 3. Найдите все обратимые элементы в кольце формальных степенных рядов $\mathbb{F}[[x]]$.

Задача 4. Напомним доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел: если $p_1, \dots, p_n$ первые n простых чисел, то число $p_1 \cdots p_n + 1$ взаимно просто с каждым из них.

(1) Модифицируйте доказательство Евклида, чтобы доказать, что в кольце многочленов $\mathbb{F}[x]$ бесконечно много неприводимых многочленов с коэффициентом 1 при старшей степени.

(2) Почему доказательство Евклида не работает для кольца формальных степенных рядов $\mathbb{F}[[x]]$?

Задача 5. Докажите, что элемент 2 в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ неприводим, но не прост.

Задача 6. Разложите 30 на простые множители в кольце целых гауссовых чисел.

Задача 7. Найдите наибольший общий делитель целых гауссовых чисел $11 + 7i$ и $18 - i$ в $\mathbb{Z}[i]$.

Задача 8 (Разложение дроби на простейшие: числа)**.** (1) Пусть m и n два целых взаимно простых числа. Докажите, что любого целого числа a найдутся целые a_1 и a_2, такие что

$$\frac{a}{mn} = \frac{a_1}{m} + \frac{a_2}{n}.$$

(2) Пусть $p_1, \dots, p_n$ — попарно различные простые числа, а $k_1, \dots, k_n$ — натуральные числа. Докажите, что любого целого числа a найдутся целые $a_1, \dots, a_n$, такие что

$$\frac{a}{p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n}} = \frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \ldots + \frac{a_n}{p_n^{k_n}}.$$

Задача 9 (Разложение дроби на простейшие: многочлены)**.** Докажите, что каждая рациональная функция в $\mathbb{C}(x)$ может быть записана как сумма многочлена и функций вида $\frac{b}{(x-a)^k}$, где $a, b \in \mathbb{C}$, а $k \in \mathbb{N}$.

Задача 10. Какие из следующих колец (а) евклидовы (б) факториальны?

(1) $\mathbb{Z}[e^{\frac{2\pi i}{3}}]$; (2) $\mathbb{R}[x, y]$; (3) $\mathbb{Z}[x]$; (4) $\mathbb{F}[x, y]$; (5) $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$; (6) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.