

**Темы курсовых работ**  
**Факультет математики ВШЭ, 2013/14 учебный год**  
**проф. В.Б. Шехтман**

**1. Игры в теории моделей (1-2 курс)**

В теории моделей для исследования формул и теорий используются специальные игры. Типичный пример: даны два параллельных отрезка  $[(0,0),(m,0)]$  и  $[(0,1),(n,1)]$ , где  $m,n$  - натуральные. Первый игрок каждым ходом выбирает новую точку с целыми координатами на одном из отрезков, а второй - соединяет ее отрезком с новой точкой с целыми координатами на другом отрезке. При этом никакие соединяющие отрезки не должны пересекаться. Всего разрешается сделать  $k$  ходов. Кто выиграет в этой игре (в зависимости от  $k,m,n$ ), если оба игрока очень умны? Какие аналогичные игры можно придумать и что про них можно доказать?

**2. Временные логики (1-2 курс)**

Временные логики описывают логические свойства временных связей - таких как "завтра", "всегда", "когда-то было" и др. Эти свойства зависят от того, как мы представляем себе структуру времени. Например, если моменты времени - целые числа, то "завтра" и "вчера" взаимно обратны, а "всегда" напоминает квантор общности, причем с помощью "всегда" и "завтра" можно выразить аксиому индукции. Если моменты времени - вещественные или рациональные числа, то имеется немало открытых вопросов об этих связях, а некоторые из доказанных теорем - достаточно удивительны.

**3. Деонтические логики (1 курс)**

Деонтические логики описывают логические свойства связей "обязательно", "разрешено", "запрещено" и близких к ним. Эти свойства совсем не очевидны. Например, на первый взгляд, связь "обязательно" монотонна, т.е. если из  $A$  следует  $B$ , то из обязательности  $A$  следует обязательность  $B$ . Но тогда получается, что если обязательно надо отправить письмо, то обязательно надо отправить письмо или сжечь его (парадокс Росса). Имеется несколько подобных парадоксов, которые решаются подходящим выбором языков и моделей. Свойства получающихся при этом логик до конца не изучены.

**4. Операции замыкания (2-3 курс)**

Операции замыкания возникают в различных разделах математики. Примеры: топологическое замыкание, линейная оболочка, алгебраическое замыкание, выпуклая оболочка. С общей точки зрения, замыкание [...] задается свойствами:  $A \subset [A]$ ,  $[A] \subset [A \cup B]$ ,  $[[A]] = [A]$ . Но в конкретных примерах возникают дополнительные свойства, которые не всегда известны. В частности, неизвестно, какие свойства (выразимые с помощью булевых операций и замыкания) имеет выпуклая оболочка.

**5. Логика задач (2-3 курс)**

В 1933 г. А.Н. Колмогоров предложил модель интуиционистской логики высказываний с помощью "задач". Точное определение этой модели было дано позднее Ю.Т. Медведевым. "Логика задач" Колмогорова - Медведева оказывается сильнее интуиционистской и слабее классической и (по-видимому) очень сложной. Существуют ли другие "разумные" варианты определения задачи? К каким логикам они приводят? Эти вопросы мало исследованы до сих пор.