

**Домашнее задание 4. Срок сдачи 11 октября.**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

**Задача 1.** Птицефабрика фасует яйца в коробки, рассчитанные либо на дюжину яиц, либо на 25 яиц. Сможет ли птицефабрика отсчитать покупателю ровно 401 яйцо, используя только такие коробки? Предполагается, что в каждой коробке лежит ровно столько яиц, на сколько она рассчитана.

**Задача 2.** Обозначим через  $\mathbb{F}_5$  поле из пяти элементов. Найдите все пары изоморфных колец в следующем списке:

(1)  $\mathbb{F}_5$ , (2)  $\mathbb{F}_5 \oplus \mathbb{F}_5$ , (3)  $\mathbb{F}_5[x]/(x^2+1)$ , (4)  $\mathbb{Z}[i]/(5)$ , (5)  $\mathbb{Z}[i]/(2+i)$ , (6)  $\mathbb{F}_5[x]/(x^2-1)$ .

**Задача 3.** Для каждого  $k \in \mathbb{N}$  найдите число решений уравнения

$$x^2 = 1$$

в кольце  $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ .

**Задача 4.** Найдите неприводимый над  $\mathbb{Z}$  многочлен  $f \in \mathbb{Z}[x]$  степени 4 со старшим коэффициентом 1, такой что

$$f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0.$$

**Задача 5.** Пусть  $p, q \in \mathbb{N}$  — различные простые числа. Докажите, что сравнение

$$p^x + q^y \equiv 1 \pmod{pq}$$

разрешимо в натуральных числах.