

## Механика и теория поля 2013.

### Листок 3. Гамильтонов формализм: скобки Пуассона и законы сохранения

1. Преобразование Лежандра  $\iota$  задается на множестве дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций

$$\iota: f(x) \mapsto h(p) = (xp - f(x))|_{x=x(p)},$$

где  $x, p \in \mathbb{R}$ , и  $x(p)$  — результат разрешения условия  $f'(x) = p$  относительно  $x$ , т.е.,  $f'(x(p)) \equiv p$ . Докажите, что преобразование Лежандра инволютивно:  $\iota \circ \iota = id$ , и его образ состоит из дважды непрерывно дифференцируемых выпуклых функций.

2. Скобка Пуассона и родственные дифференциально-геометрические конструкции.

а) Билинейная операция на пространстве функций на многообразии в некоторых координатах  $z^a$  задается формулой

$$\{f, g\} = \partial_a f J^{ab}(z) \partial_b g.$$

Какие условия требуется наложить на матрицу  $J^{ab}(z)$ , чтобы операция  $\{*, *\}$  была скобкой Пуассона? Как преобразуется  $J^{ab}$  при замене координат?  $J^{ab}(z)$  называется *структурной матрицей* скобки Пуассона.

б) Сопоставим функции  $h(z)$  векторное поле  $X_h$ , действующее по правилу  $X_h(f) := \{f, h\}$ . Такое векторное поле называется *гамильтоновым*. В координатах  $z^a$  представляется в виде  $X_h = J^{ab}(z) \partial_b h \partial_a$ . Докажите соотношение, устанавливающее связь между скобкой Пуассона функций и алгеброй Ли (коммутатором) соответствующих гамильтоновых векторных полей:

$$[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

в) Рассмотрим скобку Пуассона с невырожденной структурной матрицей  $J^{ab}(z)$ . Обозначим  $w(z) = (J(z))^{-1}$ . Убедитесь, что формула  $\Omega = w_{ab}(z) dz^a \wedge dz^b$  задает невырожденную замкнутую 2-форму, которая действует на гамильтоновых векторных полях по правилу

$$\Omega(X_f, X_g) = \{g, f\}.$$

Такая 2-форма называется *симплектической структурой*, а многообразие, на котором она задана, — *симплектическим многообразием*.

3. Пусть  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  — радиус-вектор и импульс материальной точки, декартовы координаты которых имеют канонические скобки Пуассона

$$\{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{r_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим вектор момента импульса точки  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$  и векторную функцию на фазовом пространстве вида

$$\vec{f} = \vec{r} \phi_1 + \vec{p} \phi_2 + \vec{M} \phi_3,$$

где  $\phi_a$ ,  $a = 1, 2, 3$  — произвольные скалярные функции. Найдите значение скобки Пуассона  $\{(\vec{a}, \vec{M}), (\vec{b}, \vec{f})\}$ , где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — произвольные постоянные векторы.

4. Материальная точка массы  $m$  движется в центрально-симметричном потенциале

$$U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \quad r = |\vec{r}|.$$

а) Докажите, что вектор

$$\vec{K} = \frac{1}{m}(\vec{p} \times \vec{M}) - \frac{\alpha \vec{r}}{r},$$

называемый вектором Рунге-Ленца, является интегралом движения. Здесь  $\vec{M}$  и  $\vec{p}$  — момент импульса и импульс материальной точки, соответственно.

б) Вычислите скобки Пуассона  $\{K_i, K_j\}$  и  $\{K_i, M_j\}$ .

5. Гамильтониан равномерно намагниченного шара в однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$  имеет вид

$$H = \frac{(\vec{M}, \vec{M})}{2I} - \gamma(\vec{M}, \vec{\mathcal{H}}),$$

где  $\vec{M}$  — вектор момента импульса шара,  $I$  — его момент инерции, а константа взаимодействия  $\gamma$  носит название гиромагнитного отношения. Скобки Пуассона декартовых компонент момента импульса имеют вид  $\{M_i, M_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} M_k$ , где  $\epsilon_{ijk}$  — полностью антисимметричный тензор третьего ранга,  $\epsilon_{123} = 1$ .

Выведите уравнения движения для компонент момента импульса и найдите их явное решение для случая  $\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H}_0)$ .

6. Рассмотрим внимательней скобку Пуассона, задаваемую формулой

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} x_k, \quad (*)$$

где  $\{x_i\}_{i \in 1,2,3}$  — координаты в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Структурная матрица этой скобки Пуассона вырождена, а значит, существуют функции  $Z^\alpha(x)$ , такие что  $\{Z^\alpha, f\} = 0, \forall f$ . Эти функции называются центральными в алгебре скобок Пуассона. Условия  $Z^\alpha(x) = c^\alpha$  расслаивают фазовое пространство на, так называемые, *симплектические листы* (здесь  $c^\alpha$  — константы, нумерующие различные симплектические листы). Гамильтоновы поля, задаваемые скобкой Пуассона касательны к поверхностям ее симплектических листов. Если же ограничить скобку Пуассона на симплектический лист, то она становится невырожденной.

Симплектическими листами пуассоновой структуры (\*) являются концентрические сферы в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

а) Найдите невырожденную скобку Пуассона, порождаемую ограничением скобки (\*) на сферу радиуса  $r$ . Определите соответствующую симплектическую 2-форму.

б) Рассмотрим стереографическую проекцию сферы из северного полюса на плоскость, касающуюся сферы в южном полюсе:

$$(\theta, \phi) \in S^2 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad e^{i\phi} \operatorname{ctg}(\theta/2) \mapsto x + iy.$$

Найдите симплектическую структуру на касательной плоскости, в которую переходит симплектическая структура на сфере, найденная в предыдущем пункте. Определите соответствующие скобки Пуассона.

в) Найдите уравнения движения на плоскости с пуассоновой структурой, найденной в предыдущем пункте, которые отвечают гамильтониану

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$