ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 2: ЯДРА, КОЯДРА, ТОЧНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Осень 2013 года

Всюду в этом листке под "предпучками" и "пучками" подразумеваются предпучки и пучки абелевых групп. Напомним, что предпучок на пространстве X называется пучком, если он удовлетворяет двум условиям: единственности (сечения над открытым множеством U с заданными ограничениями на открытые множества U_α, образующие покрытие U) и существования (сечения над U с такими заданными ограничениями на U_α, согласованными на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta$). Будем называть предпучок $\mathcal{F}$ *отделимым*, если он удовлетворяет первому из этих двух условий (единственности).

Понятия *подпредпучка* и *факторпредпучка*, свойства *инъективности* и *сюръективности* гомоморфизмов предпучков, конструкции *ядра*, *образа* и *коядра* гомоморфизма предпучков определяются путем применения соответствующих понятий и конструкций для абелевых групп к группам сечений предпучков на каждом открытом множестве. Например, подпредпучок $\mathcal{G}$ предпучка $\mathcal{F}$ — это совокупность подгрупп $\mathcal{G}(U) \subset \mathcal{F}(U)$, заданных для всех открытых множеств $U \subset X$ так, что для любых вложенных открытых множеств $V \subset U$ отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ отображает $\mathcal{G}(U)$ в $\mathcal{G}(V)$. Факторпредпучок предпучка $\mathcal{F}$ по его подпредпучку $\mathcal{G}$ сопоставляет открытому множеству U факторгруппу $\mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, и т.д.

Подпучком пучка называется его подпредпучок, являющийся пучком. Гомоморфизм пучков называется инъективным, если он инъективен как гомоморфизм предпучков.

Задача 1. Докажите следующие утверждения:

а) всякий подпредпучок отделимого предпучка отделим; в частности, всякий подпредпучок пучка является отделимым предпучком;

б) факторпредпучок пучка по его подпучку является отделимым предпучком;

в) ядро гомоморфизма из пучка $\mathcal{F}$ в отделимый предпучок $\mathcal{G}$ является подпучком в $\mathcal{F}$.

Задача 2. Приведите контрпримеры, показывающие, что

а) факторпредпучок пучка по его подпучку может не быть пучком;

б) коядро гомоморфизма пучков может не быть отделимым предпучком.

Пусть $\mathcal{F}^+$ обозначает пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{F}$ (на жаргоне, пучок $\mathcal{F}^+$ называется *пучковизацией* предпучка $\mathcal{F}$).

Задача 3. Докажите следующие утверждения:

а) для любого предпучка $\mathcal{F}$, естественный гомоморфизм предпучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ индуцирует изоморфизмы слоев $\mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}^+_x$ во всех точках $x \in X$;

б) гомоморфизм отделимых предпучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ инъективен тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм слоев $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ инъективен для всех точек $x \in X$;

в) предпучок $\mathcal{F}$ отделим тогда и только тогда, когда естественный гомоморфизм предпучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^+$ инъективен;

г) гомоморфизм пучков $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм слоев $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ является изоморфизмом для всех точек $x \in X$.

Пусть $\mathcal{G}$ — подпучок пучка $\mathcal{F}$. *Факторпучком* $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ называется пучковизация факторпредпучка $\mathcal{F}$ по $\mathcal{G}$.

Задача 4. а) Покажите, что для любого открытого множества $U \subset X$ последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})(U)$$

точна. (В такой ситуации говорят, что функтор, сопоставляющий пучку $\mathcal{F}$ группу его сечений $\mathcal{F}(U)$, *точен слева.*)

б) Покажите, что для любой точки $x \in X$ последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})_x \longrightarrow 0$$

точна. (В такой ситуации говорят, что функтор, сопоставляющий пучку $\mathcal{F}$ его слой $\mathcal{F}_x$, *точен.*)

Пусть $f\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ — гомоморфизм пучков. *Ядром* гомоморфизма f называется его ядро как гомоморфизма предпучков. *Образом* гомоморфизма f называется пучковизация его образа как гомоморфизма предпучков. *Коядром* гомоморфизма f называется пучковизация его коядра как гомоморфизма предпучков.

Задача 5. Покажите, что

а) ядро гомоморфизма f является подпучком пучка $\mathcal{F}$;

б) образ гомоморфизма f является факторпучком пучка $\mathcal{F}$ по ядру гомоморфизма f;

в) образ гомоморфизма f является подпучком пучка $\mathcal{G}$;

г) коядро гомоморфизма f является факторпучком пучка $\mathcal{G}$ по образу гомоморфизма f.

Задача 6. Покажите, что следующие условия эквивалентны (гомоморфизм пучков f называется *сюръективным*, если выполнено любое из них):

а) образ гомоморфизма f, рассматриваемый как подпучок в $\mathcal{G}$, совпадает со всем пучком $\mathcal{G}$;

б) коядро гомоморфизма f является нулевым пучком;

в) индуцированный гомоморфизм слоев $f_x\colon \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ сюръективен для всех точек $x \in X$.

Последовательность предпучков и гомоморфизмов $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$ называется *точной в члене* $\mathcal{Q}$, если образ гомоморфизма $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ (рассматриваемого как гомоморфизм предпучков) совпадает с ядром гомоморфизма $\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R}$. Последовательность пучков и гомоморфизмов $\cdots \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \cdots$ называется *точной в члене* $\mathcal{G}$, если образ гомоморфизма $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ (рассматриваемого как гомоморфизм пучков) совпадает с ядром гомоморфизма $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$. Последовательность (пред)пучков и гомоморфизмов называется *точной*, если она точна во всех своих внутренних членах.

Задача 7. Покажите, что

а) последовательность предпучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$ на пространстве X точна тогда и только тогда, когда последовательность групп сечений $\cdots \longrightarrow \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow \mathcal{R}(U) \longrightarrow \cdots$ точна для всех открытых подмножеств $U \subset X$;

б) последовательность пучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \cdots$ на пространстве X точна тогда и только тогда, когда индуцированная последовательность слоев $\cdots \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \longrightarrow \cdots$ точна для всех точек $x \in X$;

в) для любой точной последовательности предпучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \cdots$, последовательность ассоциированных пучков $\cdots \longrightarrow \mathcal{P}^+ \longrightarrow \mathcal{Q}^+ \longrightarrow \mathcal{R}^+ \longrightarrow \cdots$ является точной последовательностью пучков (в такой ситуации говорят, что функтор пучковизации $\mathcal{P} \longmapsto \mathcal{P}^+$ *точен*);

г) последовательность ассоциированных пучков из пункта в), *рассматриваемая как последовательность предпучков*, может не быть точной (приведите контрпример).