Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 5.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Через R обозначается коммутативное кольцо с единицей.

Задача 1 (Гомоморфизм подстановки)**.** Докажите, что отображение

$$\phi_a : R[x] \to R; \quad \phi_a : f(x) \mapsto f(a)$$

является гомоморфизмом колец для любого ненулевого элемента $a \in R$.

Задача 2. Для каждого $a \in \mathbb{C}$ опишите ядро и образ гомоморфизма

$$\varphi_a : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}; \quad \varphi_a : f(x) \mapsto f(a).$$

Задача 3. Сколько различных идеалов в кольце $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

Задача 4. Докажите, что любой идеал в кольце гауссовых целых чисел содержит обычное целое число.

Задача 5. Опишите все идеалы в поле.

Задача 6 (Эндоморфизм Фробениуса)**.** Предположим, что $\mathrm{char}(R) = p$ для простого $p \in \mathbb{Z}$. Докажите, что отображение

$$R \to R; \quad x \mapsto x^p$$

является эндоморфизмом кольца R.

Задача 7. Назовём *вычетом многочлена* $f \in \mathbb{Z}[x]$ *по модулю* $p \in \mathbb{Z}$ его образ при гомоморфизме

$$\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[x]; \quad a_n x^n + \ldots + a_0 \mapsto [a_n]_p x^n + \ldots + [a_0]_p.$$

Приведите пример такого многочлена в $\mathbb{Z}[x]$, что его вычет по модулю 2, 3 приводим, а по модулю 5 — неприводим.

Задача 8 (Лемма Гаусса)**.** Назовём многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ *примитивным*, если НОД его коэффициентов равен 1. Докажите, что произведение примитивных многочленов является примитивным.

Задача 9. Используя лемму Гаусса, докажите, что если $f \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$, то f неприводим и в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 10 (Критерий Эйзенштейна)**.** Пусть $f = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Докажите, что если простое число $p \in \mathbb{Z}$ делит $a_0, \ldots, a_{n-1}$, но при этом a_n не делится на p, а a_0 не делится на p^2, то f неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 11. Используя критерий Эйзенштейна, докажите, что многочлен

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1$$

неприводим для любого простого $p \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. Определим функцию $\theta(n)$ от натурального аргумента n, как четверть числа целых решений уравнения $x^2 + y^2 = n$. Докажите, что если m и n взаимно просты, то

$$\theta(m)\theta(n) = \theta(mn).$$