Разрешимые группы. Силовские подгруппы

◊ **2.1.** Докажите, что:

а) всякая подгруппа разрешимой группы разрешима;

б) всякая факторгруппа разрешимой группы разрешима;

в) если A, B — разрешимые группы, то $A \times B$ разрешима;

г) если $G/A \cong B$ и A, B разрешимы, то G разрешима.

◊ **2.2.** Докажите разрешимость группы порядка pq, где p и q — различные простые числа.

Имеет место более сильное утверждение (*теорема Бернсайда*): всякая группа порядка $p^n q^m$ разрешима.

◊ **2.3.** Докажите разрешимость группы порядка: **а)** 20; **б)** 12; **в)** p^2q; **г)** 42; **д)** 100; **е*)** $n < 60$.

◊ **2.4.** Докажите, что если p и q — различные простые числа, а $q-1$ не делит p, то всякая группа порядка pq является циклической.

◊ **2.5.** Докажите, что силовская 2-подгруппа в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$: **а)** изоморфна группе Q_8; **б)** нормальна в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.

◊ **2.6.** Верно ли, что всякая подгруппа конечнопорождённой группы тоже конечно порождена?

◊ **2.7.** Докажите, что группа G разрешима тогда и только тогда, когда существует нормальный ряд подгрупп

$$G \rhd G_1 \rhd \cdots \rhd G_N \rhd \{e\},$$

где G_i/G_{i+1} — циклическая группа.

◊ **2.8.** Опишите классы сопряжённых элементов в группе $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.

Автоморфизмы групп перестановок

Напомним, что через $\mathfrak{S}_n$ обозначается группа перестановок множества из n элементов, а через $\mathfrak{A}_n$ — подгруппа в $\mathfrak{S}_n$, состоящая из чётных перестановок.

◊ **2.9. а)** Опишите классы сопряжённости в группе $\mathfrak{A}_n$.

б) Докажите, что группа $\mathfrak{A}_n$ проста, т.е. не имеет собственных нормальных подгрупп.

◊ **2.10.** Докажите, что всякая простая группа порядка 60 изоморфна $\mathfrak{A}_5$.

Изоморфизм $\varphi\colon G \to G$ называется *автоморфизмом*. Каждому элементу $g \in G$ соответствует автоморфизм $\varphi_g\colon h \mapsto ghg^{-1}$. Автоморфизмы такого вида называются *внутренними*.

◊ **2.11.** Докажите, что группа $\mathrm{Inn}\ G$ внутренних автоморфизмов образует нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$.

◊ **2.12.** Пусть H — подгруппа индекса 6 в $\mathfrak{S}_6$. Тогда действие $\mathfrak{S}_6$ на $\mathfrak{S}_6/H$ задает гомоморфизм $\mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$.

а) Покажите, что это автоморфизм.

б) Докажите, что любая подгруппа индекса 6 в $\mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathfrak{S}_5$.

◊ **2.13.** Докажите следующие утверждения:

а) Действие группы $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ на $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ задает вложение $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5)$ в $\mathfrak{S}_6$.

б) $\mathrm{PGL}_2(K)$ действует на $\mathbb{P}^1(K)$ транзитивно.

в) Вложение из пункта а) не совпадает ни с одним из 6 «стандартных» вложений $\mathfrak{S}_5$ из $\mathfrak{S}_6$, а соответствующий автоморфизм из предыдущей задачи не является внутренним.

г) Куда этот автоморфизм переводит транспозицию?

◊ **2.14. а)** Докажите, что группа *внешних автоморфизмов* $\mathrm{Out}\,\mathfrak{S}_6 = \mathrm{Aut}\,\mathfrak{S}_6/\mathrm{Inn}\,\mathfrak{S}_6$ изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (то есть построенный в предыдущей задаче автоморфизм $\mathfrak{S}_6$ единственен с точностью до внутреннего автоморфизма).

б) Верно ли, что $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{S}_6 = \mathrm{Inn}\,\mathfrak{S}_6 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

Правила игры. Для получения максимальной оценки за листок достаточно решить 80% задач без звёздочек. Задачи из этого листка можно сдавать до 25 октября 2013 г. включительно.