

## Механика и теория поля 2013.

### Листок 4. Канонические преобразования. Представление Лакса.

---

1. Докажите, что при канонических преобразованиях, заданных производящей функцией  $F(q, Q, t)$  с невырожденной матрицей вторых частных производных  $U_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q^j \partial q^i}$ ,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q^i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q^i}, \quad H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

- а) скобки Пуассона не меняются:  $\{f, g\}_{(q,p)} = \{f, g\}_{(Q,P)}$ ;  
б) уравнения движения системы не меняют своего вида:  $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H'\}$ .

2. Рассмотрим гармонический осциллятор с гамильтонианом  $H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$ . Найдите закон эволюции области фазового пространства, заданной неравенством  $(q - a)^2 + p^2 \leq r^2$ , где  $0 < a < r$  — вещественные параметры. Убедитесь в справедливости теоремы Лиувилля явным вычислением площади этой области в произвольный момент времени.

3. Гамильтониан одномерной механической системы имеет вид  $H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$ , где  $q$  и  $p$  — канонические координата и импульс,  $U(q)$  — потенциальная энергия системы. Постройте представление Лакса для этой системы.

4. Одномерная незамкнутая цепочка Тоды представляет собой систему  $n$  одинаковых точечных частиц на прямой с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + g^2 \sum_{i=1}^{n-1} e^{2(q_i - q_{i+1})},$$

где  $g$  — константа взаимодействия — может быть без потери общности выбрана равной 1.

- а) Постройте представление Лакса для этой системы.  
б) Для случая трех частиц ( $n = 3$ ) выпишите интегралы движения системы, и убедитесь в их функциональной независимости.

5. Одномерная замкнутая цепочка Тоды представляет собой систему  $n$  одинаковых точечных частиц на окружности с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + g^2 \sum_{i=1}^n e^{2(q_i - q_{i+1})},$$

где мы полагаем  $q_{n+1} \equiv q_1$ . Постройте представление Лакса для этой системы.