Всеволод Шевчишин

Темы курсовых работ

Курс	Тема
1--4 курсы	**1. Алгоритмические проблемы в симметрических группах и группах кос.** ***Симметрические группы и группы кос*** тесно взаимосвязаны и имеют очень похожие ***копредставления*** (задания в терминах образующих и соотношений). Эти соотношения удобно кодировать в терминах так называемой ***системы Кокстера*** (Coxeter). Это позволяет определять аналоги симметрических групп и групп кос, отвечающих произвольным системам Кокстера. **Цель работы ---** научиться эффективно решать проблему равенства двух элементов в таких группах, заданных в виде явных ***слов*** (т.е. произведений образующих). Под "явностью" понимается построение алгоритма и его реализация на компьютере.
	Группа классов отображений (нем. Abbildungsklassengrupppe, англ. mapping class group), называемая ещё группой ***диффеотопий***, определяется как группа ***диффео***морфизмов компактной ориентированной поверхности по модулю изо***топий***. Она обладает естественной системой образующих, которые называются ***скручивания Дена*** (англ. Dehn twist). Более того, группы классов отображений допускают сравнительно простое копредставление, найденное Вайнрыбом (Wajnryb) и переосмысленное Мацумото (Matsumoto), которое делает их похожими на обобщённые группы кос ассоциированные с подходящими системами Кокстера.
1--4 курсы	**2. Группы классов отображений поверхностей и функции Морса.** Функция Морса (Morse) на многообразии --- это функция имеющая лишь простейшие особенности. Каждая такая функция задаёт «разбиение на ручки». В случае поверхностей это разбиение фактически эквивалентно разбиению на многоугольники. **Цель работы** --- «научиться» строить копредставление Вайнрыба-Мацумото рассмотрев комбинаторику действия группы диффеоморфизмов на множестве функций Морса и индуцированных разбиений на ручки.
2--4 курсы	**3. Группы классов отображений поверхностей с инволюциями.** Один из способов "сравнить" две поверхности --- это реализовать одну из них как разветвлённое накрытие другой. В случае, когда такое накрытие двулистно, оно допускает накрывающее преобразование, которое является инволюцей. Наоборот, фактор поверхности по сохраняющей ориентацию инволюции является двулистным разветвлённым накрытием. **Цель работы** --- научиться сравнивать группы классов отображений поверхности с инволюцией и фактор-поверхности, а также копредставления Вайнрыба-Мацумото этих групп.

Курс	Тема
3--4 курсы бакал., магистр.	**4. Симплектоморфизмы К3-поверхностей.** *Симплектическое многообразие* --- это многообразие X, снабженное невырожденной замкнутой 2-формой w, называемой ***симплектической формой***. ***Симплектоморфизм*** --- это диффеоморфизм такого многообразия, сохраняющий симплектическую форму. С точки зрения механики, симплектическое многообразие --- это фазовое пространство механической системы, а симплектоморфизм --- это переход из одного состояния в другое. Симплектические многообразия всегда имеют чётную размерность. Один из важнейших примеров 4-многообразий представляют т.н. ***комплексные К3-поверхности,*** например, квартики в ***CP***^3. Все К3-поверхности диффеоморфны, односвязны, обладают выделенным классом деформационной эквивалентности симплектических форм, а также допускают симплектические пучки Лефшеца (Lefschetz) рода 1, т.е. симплектическое расслоение на 2-мерные торы со специальными особыми точками. **Цель работы** --- дать описание группы симплектоморфизмов К3-поверхностей по модулю изотопий и зависимость этой группы от класса когомологий симплектической формы.
3--4 курсы бакал., магистр.	**5. Лагранжевы зонтики Уитни и фредгольмовы операторы.** ***Лагранжево подмногообразие*** в симплектическом многообразии (X, w) --- это подмногообразие L половинной размерности, такое что w тождественно обнуляется на нём. Они важны как и в физике (в частности, в механике), так и в математике. Теория Громова псевдоголоморфных кривых в симплектических многообразиях допускает Лагранжеву версию, в которой рассматриваются псевдоголоморфные кривые с границами на Лагранжевых подмногообразях. В этом случае линеаризация задачи деформации псевдоголоморфных кривых приводит к фредгольмовым операторам. Однако не все многообразия половинной размерности допускают Лагранжево вложение в данное симплектическое многообразие (X, w). С другой стороны, Гивенталь показал, что любая поверхность допускает Лагранжевы вложения в данное симплектическое 4-многообразие, при условии что мы позволяем специальные изолированные особенности, называемые ***Лагранжевыми зонтиками Уитни***. Основной феномен этих особенностей --- нарушение свойства фредгольмовости. **Цель работы** --- дать геометрическое описание нарушение эллиптичности Лагранжевых граничных условий псевдоголоморфных кривых вблизи "острия" Лагранжевого зонтика Уитни. Описать изменение индекса.
3--4 курсы бакал., магистр.	**6. Суперинтегрируемые метрики на поверхности с полиномиальными интегралами 1-й и 4-й степеней.** Как хорошо известно в механике, Риманову метрику на многообразии размерности n можно рассматривать как "чисто кинетический" лагранжиан. При этом соответствующий фазовый поток совпадает с геодезическим потоком на многообразии, а гамильтонианом будет двойственная метрика на кокасательном расслоении. Такая метрика называется ***полиномиально (супер)интегрируемой*** если гамильтониан допускает n (соответственно, n+1) функционально независимых интегралов, каждый из которых полиномиально зависит от импульсных координат. За один из таких интегралов можно взять сам гамильтониан, поскольку он квадратичен. **Цель работы** --- дать (полное) описание суперинтегрируемых метрик на поверхностях допустающих полиномиальные интегралы 1-й и 4-й степеней. Попытаться понять, когда такая метрика определена "глобально", т.е. продолжается до метрики на компактной поверхности.

Курс	Тема
3--4 курсы бакал., магистр.	**7. Компактификация пространст модулей инстантонов на 4-мерных многообразиях.** Пусть G --- компактная полупростая группа Ли, а X --- компактное 4-многообразие с фиксированной метрикой g. G-***инстантон*** на X --- это главное G-расслоение P над X со связносью A, кривизна F_A которой антиавтодуальна по отношению к g. ***Пространство модулей инстантонов*** на X --- это множество всех G-инстантонов по модулю естественной эквивалентности. В случае, когда X --- компактная комплексная поверхность, а метрика g --- Кэлерова (Kähler) (или Годюшонова (Gauduchon)), инстантоны можно отождествить с mu-стабильными голоморфными G-расслоениями. Пространства модулей SU(2)-инстантонов --- базисный объект в теории инвариантов Дональдсона (Donaldson). **Цель работы** --- построение компактификации пространства модулей инстантонов на X и описание структуры его стратов. Сравнение этой компактификации с компактификациями Гизекера-Маруямы (Gieseker-Maruyama) и Дональдсона-Уленбек (Uhlenbeck).