Обязательное письменное домашнее задание

Доказать следующее утверждение

Пусть $\mathcal{F} \mapsto \tilde{H}^*(X,\mathcal{F})$ *— произвольное соответствие, сопоставляющее пучку абелевых групп* $\mathcal{F}$ *над топологическим пространством* X *семейство абелевых групп* $\tilde{H}^*(X,\mathcal{F}) = \{\tilde{H}^n(X,\mathcal{F}) | n \geq 0\}$ *таким образом, что* $\tilde{H}^0(X,\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ *и выполняются 4 аксиомы:*

I. Если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$.

II. Морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ пучков над X порождает гомоморфизмы групп когомологий $h_n : \tilde{H}^n(X,\mathcal{A}) \to \tilde{H}^n(X,\mathcal{B})$ такие, что:
1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ — гомоморфизм глобальных сечений;
2) если h — тождественный морфизм, то h_n — тождественный гомоморфизм для любого n;
3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ — последовательность морфизмов пучков, то $(lh)_n = l_n h_n$.

III. Точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ порождает точную последовательность групп когомологий $0 \to \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} \tilde{H}^1(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} \tilde{H}^1(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{H}^2(X,\mathcal{A})...$, называемую *длинной точной последовательностью.*

IV. морфизм (т.е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

порождает морфизм (т.е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{B})... \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}') \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}') \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}') \arrow[r] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}') \arrow[r] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{B}')...
\end{tikzcd}.$$

Тогда группы $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F})$ *и* $H^n(X,\mathcal{F})$ *изоморфны.*