Прикладные методы анализа. Листок 1маг.
Задачи с начальными условиями и интегральные уравнения

1. Запишите задачу Коши $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(0) = X_0$ в виде системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Здесь $A(t)$ – непрерывная $n \times n$ матрица, $X(t)$ и X_0 – вектор-столбцы. Покажите, что применение метода последовательных приближений дает решение задачи Коши в виде абсолютно сходящегося ряда

$$X(t) = X_0 + \int_0^t d\tau A(\tau)X_0 \ + \cdots + \int\limits_{0<\tau_1<\cdots<\tau_n<t} d\tau_1 \cdots d\tau_n A(\tau_n) \cdots A(\tau_1)X_0 + \cdots ,$$

носящегоназавание упорядоченной экспоненты, $X(t) = \left(\mathcal{P}\mathrm{exp} \int_0^t A(\tau)d\tau\right) X_0$. Упростите ответ для постоянной матрицы $A(t) = A$.

2. Покажите, что задача Коши $u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots a_n(t)u(t) = f(t)$ может быть переписана в виде интегрального уравнения Вольтерра с полиномиальным ядром

   а) для нулевых начальных условий $u(t_0) = \cdots = u^{(n-1)}(t_0) = 0$;

   б) для ненулевых начальных условий $u(t_0) = u_0, \cdots , u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1}$.

Выпишите решение в виде ряда итерированных интегралов.

3. Сведите следующие задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма:

   а) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0,\ \ y'(1) = 0;$

   б) $(xy')' + \lambda xy = 0, \qquad |y(0)| < \infty,\ \ y(1) = 0$

Можно ли эти интегральные уравнения привести к уравнению с симметричным ядром?

4. а) Покажите, что итерированные ядра уравнения Вольтерра

$$u(t) = \int_0^t K(t - s)u(s)ds + f(t)$$

   также зависят только от разности аргументов;

   б) Выпишите резольвенту ядра этого уравнения методом преобразования Лапласа.

5. Для уравнения Фредгольма

$$u(t) = \lambda \int_0^1 u(s)\, ts\, ds + f(t)$$

   а) найдите все итерированные ядра и резольвенту ядра. Для каких λ верно разложение резольвенты в ряд?

   б) покажите, что ряды Фредгольма сходятся к целым функциям $D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}$ и $D(t, s, \lambda) = ts$;

   в) выпишите решение уравнения.