# 1. Прикладные методы анализа. Листок 3. Обобщенные функции

Обязательные задачи: 1а-в,2,3,4,5,6а. Срок сдачи - 29 октября.

В этом листке под обобщенными функциями понимаются непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathcal{D}$ гладких финитных функций на вещественной прямой.

1. Покажите, что следующие функции стремятся к $\delta(x)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$a)\frac{1}{2\varepsilon}\chi_{-\varepsilon,\varepsilon}; \qquad \text{б)}\ \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}; \qquad \text{в)}\ \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}}e^{-x^2/4\varepsilon}; \qquad \text{г)}\ \frac{1}{\pi x}\sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

2. Вычислите следующие обобщенные функции как функционалы на основных:

$a)$ $(|x+1|+|x-1|)''$; б) $[x]$; в) $x^k\delta^{(l)}(x)$, где $k=0,1,2,\ l\geq 0$; г) $\left(v.p.\dfrac{1}{x}\right)'$.

Здесь $[x]$ – целая часть $x$ – наибольшее целое число, не превосходящее $x$.

3. Покажите, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\delta(x-k)$ сходится в $\mathcal{D}'$ для любых $a_k \in \mathbb{C}$

4. а) Опишите все решения уравнения $y'(x)=0$ в обобщенных функциях.
   б) Опишите все решения уравнения $xy(x)=0$ в обобщенных функциях.

5. Покажите, что функция $\ln|x|$ локально интегрируема на вещественной прямой. Найдите ее производную в классе обобщенных функций.

6. Пусть $L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx} + c(x)$ – дифференциальный оператор с гладкими на отрезке $[a,b]$ коэффициентами. Дифференциальный оператор $M$ называется дуальным (двойственным) к $L$ относительно скалярного произведения $(u,v) = \int_a^b dx u(x)v(x)$, если для любых гладких на $[a,b]$ функций $u(x)$ и $v(x)$ разность $(Lu,v)-(u,Mv)$ зависит только от значений $u$, $v$ и их производных на концах отрезка.
   а) Выпишите $M$, зная $L$; покажите, что всякий самодвойственный $(M=L)$ дифференциальный оператор 2-го порядка может быть представлен в виде $L = \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d}{dx}\right) + c(x)$, и
   $$(Lu,v)-(u,Lv) = a(x)\left(u'(x)v(x)-u(x)v'(x)\right)\Big|_{x=a}^{x=b};$$
   б) Пусть $u(x)$ - функция, равная нулю вне отрезка $[a,b]$ и непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ , $L$ - самодуальный дифференциальный оператор 2 порядка. Вычислите $L(u)$ в классе обобщенных функций. Согласуйте ответ с пунктом а).

7.* Пусть $D$ - область на плоскости, функции $p,q \in C^1(D)$. Покажите, что дифференциальный оператор $L(u) = (pu'_x)'_x + (pu'_y)'_y - qu$ самодуален в $D$ и для любых $u,v \in C^1(D)$ справедлива формула Грина

$$\iint_D dx\,dy\,(L(u)v - uL(v)) = \int_{\partial D} ds\,p(s)\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right),$$

где $n$ - внешняя нормаль к границе $\partial D$, $ds$ - дифференциал длины дуги.

8. Покажите, что обобщенная функция $\delta(x)$ не может быть представлена никакой локально интегрируемой на прямой функцией.

9. Обобщенная функция $x^{-3}$ в смысле главного значения определена соотношением

$$x^{-3} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right),$$

где $x^{-2}$ также понимается в смысле главного значения. Найдите явное выражение для ее действия на основную функцию.