

Задачи для семинара 6.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. (а) Докажите, что если $m \times n$ -матрица A получается из матрицы A' элементарными преобразованиями строк, то системы из m однородных линейных уравнений на n неизвестных $AX = 0$ и $A'X = 0$ эквивалентны (то есть имеют одно и то же множество решений).

(б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для систем неоднородных линейных уравнений.

Задача 2. Докажите, что любые 3 вектора в \mathbb{R}^2 линейно зависимы.

Задача 3. Пусть V — вещественное векторное пространство всех вещественных функций на отрезке $[0, 1]$. Являются ли функции x^3 , $\sin(x)$, $\cos(x)$ и e^x линейно зависимыми в V ?

Задача 4. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Какие из следующих подмножеств являются вещественными подпространствами в $\mathbb{R}[x]$?

(а) $\{f \mid f(1) = 2\}$ (б) $\{f \mid f(1) = 0\}$ (в) $\{f \mid f \text{ делится на } (x^2 + 1)\}$

Задача 6. Какие из следующих подмножеств являются комплексными подпространствами в \mathbb{C}^2 ?

(а) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ (б) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x = y\}$

Задача 7. Найдите матрицу обратную относительно умножения к матрице

(а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, (б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$.

Задача 8. (а) Докажите, что если $m \times n$ -матрица A' получается из матрицы A заменой i -той строки на сумму i -той и j -той строки, то $A' = (I_m + E_m^{ij})A$, где I_m — единичная $m \times m$ -матрица, а E_m^{ij} — матрица того же размера с единственным ненулевым элементом (равным 1) на (i, j) -том месте.

Задача 9. Пусть A — квадратная матрица. Докажите, что следующие три условия эквивалентны.

(1) Матрицу A можно перевести в единичную матрицу элементарными преобразованиями строк.

(2) Матрица A имеет обратную относительно умножения.

(3) Система линейных уравнений $AX = 0$ имеет только нулевое решение.

Задача 10. При каком условии на коэффициенты 2×2 -матрица имеет обратную?