

Множества

1. Упорядоченное архимедово поле. Аксиома полноты. Вещественные числа. Теорема: любые два архимедова упорядоченные поля канонически изоморфны.
2. Аксиома Архимеда. Пример упорядоченного неархимедова поля.
3. Ограниченное множество, верхняя грань. Точная верхняя грань (\sup). Существование точной верхней грани у ограниченного сверху множества. Эквивалентность существования \sup аксиоме полноты.
4. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Эквивалентность аксиоме полноты.
5. Десятичное представление вещественного числа. Существование и единственность десятичного представления. Связь с другими конструкциями действительных чисел.
6. Открытые и замкнутые множества. Пересечение и объединение открытых множеств. Дополнение к открытому множеству
7. Замкнутые множества. Пересечение и объединение замкнутых множеств. Дополнение к замкнутому множеству.
8. Структура открытого множества на прямой.
9. Предельные точки множества. Изолированные точки. Замкнутость множества предельных точек.
10. Граница и внутренность множества. Всюду плотные множества. Нигде не плотные множества. Примеры. Плотность множества рациональных чисел.
11. Канторово множество. Конструкция. Несчетность. Замкнутость. Неплотность.

Последовательности

1. Предел последовательности: определение и арифметические свойства.
2. Единственность предела сходящейся подпоследовательности.
3. Переход к пределу в неравенствах, лемма о двух милиционерах.
4. Ограниченные, неограниченные и стремящиеся к бесконечности последовательности и функции. Ограниченность сходящейся последовательности.
5. Геометрическая прогрессия. Сходимость, расходимость, ограниченность, неограниченность.
6. Бесконечные пределы. Теорема: последовательность без нулевых членов стремится к нулю тогда и только тогда, когда последовательность обратных величин стремится к бесконечности.
7. Монотонная последовательность. Теорема Вейерштрасса: каждая монотонная ограниченная последовательность сходится.
8. Подпоследовательности. Предельные точки последовательности. Теорема: последовательность сходится, если и только если предельная точка единственная.
9. Существование предельной точки у ограниченной последовательности. Замкнутость множества предельных точек.
10. Теорема Больцано-Вейерштрасса: из каждой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.
11. Число ϵ : определение.

Пределы функций, непрерывность

1. Предел функции при $x \rightarrow x_0$ и при $x \rightarrow \infty$, односторонние пределы. Определение и арифметические свойства.
2. Эквивалентность определений предела функции по Гейне и Коши.
3. Перестановочность знака предела со знаком непрерывной функции.
4. Первый замечательный предел. Непрерывность тригонометрических функций. Существование и непрерывность обратных тригонометрических функций.
5. Второй замечательный предел. Доказательство. Различные переформулировки.
6. Непрерывность: различные определения и арифметические свойства.
7. Классификация точек разрыва, примеры.
8. Точки разрыва монотонной функции.
9. Теорема: если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то эта функция положительна в некоторой окрестности точки x_0 .
10. Непрерывность сложной функции.
11. Теорема Вейерштрасса: непрерывная на отрезке функция ограничена.
12. Теорема: непрерывная на отрезке функция достигает своего максимума.
13. Теорема о промежуточном значении.
14. Теорема: монотонная на промежутке функция непрерывна везде, кроме конечного или счетного множества точек.
15. Обратная функция. Теорема об обратной функции: непрерывная функция на отрезке, допускающая обратную, монотонна и обратная к ней непрерывна.
16. Теорема: монотонная функция, принимающая все значения, непрерывна.
17. Определение и свойства показательной функции. Непрерывность показательной функции.
18. Определение и свойства степенной функции. Непрерывность степенной функции.
19. Сравнение предельного поведения функций. Понятия o и O . Эквивалентные при $x \rightarrow a$ величины. Примеры. Эквивалентности при $x \rightarrow 0$: $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\log(1+x) \sim x$, $(1+x)^\alpha \sim \alpha x$
20. Сравнение порядков роста логарифмических, степенных и показательных функций.