

Задачи для подготовки к зачёту.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задачи рекомендуется решать самостоятельно для подготовки к зачёту и обсуждать решения на семинарах.

Задача 1. Сколько решений имеет уравнение $5x = 10$

- (а) в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для простого $p \in \mathbb{N}$ (ответ зависит от p)? (б) в $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$?

Задача 2. Решите уравнения в целых числах.

- (а) $173x + 95y = 7$; (б) $57x + 102y = 3$; (в) $91x + 1001y = 6$.

Задача 3. Решите уравнения в натуральных числах.

- (а) $173x + 95y = 20000$; (б) $57x + 102y = 10000$.

Задача 4. Найдите многочлен минимальной степени $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, значения которого в точках 0, 1, 2 и 3 совпадают со значениями функции

- (а) 2^x ; (б) $\frac{1}{x+1}$; (в) $\sin(\frac{\pi x}{2})$.

Задача 5. Найдите неприводимый над \mathbb{Z} ненулевой многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$ со старшим коэффициентом 1 такой, что

- (а) $f(1+i) = 0$; (б) $f(\cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}) = 0$ для простого $p \in \mathbb{N}$; (в) $f(i + \sqrt{2}) = 0$.

Задача 6. Представляется ли многочлен $1 + x + x^2 + x^3$ в виде линейной комбинации с вещественными коэффициентами многочленов

- (а) $x + 1, (x + 1)^2, (x + 1)^3$? (б) $x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3$?

Задача 7. Являются ли линейно зависимыми над \mathbb{R} векторы

- (а) $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$? (б) $(1, 2, 3, 5), (2, 3, 5, 8), (3, 4, 7, 11) \in \mathbb{R}^4$?

Задача 8. Сколько элементов в кольце вычетов

- (а) $\mathbb{Z}[i]/(7)$? (б) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]/(x^2 + x + 1)$? (в) $\mathbb{Z}[i]/(1 + i)$?

Задача 9. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, в котором для любых x и y выполнено тождество

- (а) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$; (б) $(x + y)^4 = x^4 + y^4$.

Чему может быть равна характеристика кольца R ?

Задача 10. Существуют ли такие многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, что

- (а) $(x^2 + 2)f + (x - 1)g = 1$? (б) $(x^2 + 2)f + (x - 1)g = 3$?