Листок 3. Предел функции, непрерывность.

Анализ, 1 курс, **23.10.2013**

Срок сдачи листка 13 ноября.

Максимальная оценка за третий листок ставится, если по нему набрано не менее 16 баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

3◇1^0 Докажите эквивалентность следующих определений предела функции.
Значение A называется пределом функции $f(x)$, $f: E \to \mathbb{R}$, в точке x_0, если
- (Коши) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$ таких, что $0 < |x - x_0| < \delta$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon$;
- (Гейне) для любой последовательности $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $x_n \in E$, сходящейся к x_0, но не содержащей x_0, выполнено $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$;
- для любого множества $D \subset E$, не содержащего точки x_0, но содержащего ее в своем замыкании ($x_0 \notin D$, $x_0 \in \overline{D}$), выполнено $A \in \overline{f(D)}$.

Функция называется непрерывной в точке x_0, если она определена, имеет предел в этой точке и $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

3◇2^0 Пусть имеются функции $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, и обе функции имеют пределы в этой точке. Докажите, что $\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$.

3◇3^0 Пусть функция $g(x) \to B$, $x \to x_0$ и $g(x)$ не принимает значения B в некоторой проколотой окрестности x_0, а функция $f(x) \to A$, $x \to B$. Докажите, что $\lim_{x\to x_0} f(g(x))$ существует и равен A.

3◇4^0 Дайте определения предела функции $f(x)$ в точке x_0 слева, справа и предела при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Точкой разрыва 1-го рода функции $f(x)$ называется точка x_0, где существуют пределы $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$ и хотя бы один из них не совпадает со значением функции $f(x_0)$. Все остальные точки разрыва называются точками разрыва 2-го рода.

3◇5^0 Приведите пример функции **а)** имеющей точку разрыва 2-го рода; **б)** непрерывной только в одной точке; **в)** разрывной во всех точках прямой.

3◇6 **а**^{0}**)** Докажите, что монотонная функция может иметь разрывы только первого рода, т.е. в любой точке x_0 она имеет предел слева $\lim_{x\to x_0-0} f(x)$ и предел справа $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$.
б) Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

3◇7 В каких точках непрерывна, и в каких имеет предел

а^0**)** функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;

б) функция Римана $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \quad \text{НОД}(m,n) = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$?

3◇8 Докажите, что функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U) = \{x \mid f(x) \in U\}$ любого открытого множества U открыт.

3◇9 Опишите, каким может быть множество значений непрерывной функции, заданной на интервале.

3◇10 **а)** Докажите, что множество уровня $M_A = \{x \in I \mid f(x) = A\}$ непрерывной функции, заданной на отрезке I, замкнуто. **б*****)** Покажите, что любое замкнутое множество может быть множеством уровня какой-нибудь непрерывной функции.

3◇11 Имеются две дороги, ведущие из пункта A в пункт B, причем два человека, связанные веревкой длины 20 метров, идущие по разным дорогам, смогли перейти из пункта A в пункт B. Смогут ли по этим дорогам разъехаться два воза с сеном, едущие между этими же пунктами в противоположных направлениях, если радиусы перевозимых стогов больше 10 метров?

3◇12 Докажите, что на экваторе найдутся две противоположные точки с одинаковой температурой.

3◇13^0 Докажите, что непрерывная функция, заданная на промежутке, обладает обратной тогда и только тогда, когда она строго монотонна. Докажите также, что при этом обратная функция будет непрерывной и строго монотонной.

3◇14^0 **а)** Докажите, что, если определенная и непрерывная на $\mathbb{Q}$ функция f может быть продолжена на $\mathbb{R}$ непрерывным образом, то такое продолжение единственно. **б)** Приведите пример непрерывной функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, которую нельзя продолжить на все $\mathbb{R}$.

3◇15* Докажите, что множество точек разрыва произвольной функции, определенной на промежутке, есть множество типа F_σ, т. е. объединение последовательности замкнутых множеств.

3◇16 Определите функцию на промежутке I с заданным множеством точек разрыва E, если:
а) E – произвольное замкнутое множество;
б) $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, где E_n — замкнутые множества.

3◇17 **а)** Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ переводит каждый отрезок в отрезок. Следует ли отсюда, что она непрерывна?

3◇18* Если $f : [0;1] \to [0;1]$ монотонно возрастает (непрерывность не предполагается!), то уравнение $f(x) = x$ имеет решение.

3◇19* Даны два коммутирующих (т.е. $f(g(x)) = g(f(x))$ для любого x) непрерывных отображения f и g отрезка в себя, причем одно из них монотонно. Докажите, что у них есть общая неподвижная точка.

Канторовой лестницей называется функция $f : [0;1] \to [0;1]$, заданная в точках 0 и 1 значениями 0 и 1, соответственно, на средней трети $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ отрезка $[0;1]$ f принимает значение $\frac{1}{2}$, далее на каждом шаге у каждого оставшегося промежутка берется средняя треть, и на ней функция f определяется как среднее значение между соседними, уже определенными, значениями f. На оставшихся после счетного числа шагов точках отрезка $[0;1]$ функция f определяется по непрерывности.

3◇20* **а)** Докажите, что построенная функция f действительно может быть доопределена на весь отрезок $[0;1]$ по непрерывности. **б)** Приведите пример непрерывной функции, которая переводит множество нулевой меры в множество, которое не является множеством нулевой меры. (Множество называется *множеством меры нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно поместить в объединение счетного множества интервалов суммарной длины не большей, чем ε.) **в)** Приведите пример функции, которая обладает свойствами из предыдущего пункта, но еще является взаимнооднозначной.

3◇21* Верно ли, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда она переводит отрезки в отрезки и прообраз $\{f^{-1}(y)\}$ любой точки $y \in \mathbb{R}$ замкнут?

3◇22* Докажите, что функция не может иметь более чем счетное число точек разрыва 1-го рода.

3◇23* Может ли функция быть непрерывной во всех рациональных точках и разрывна в иррациональных?