

Решения нужно сдавать устно на математическом практикуме. Настоятельно рекомендуется предварительно записывать решения, чтобы ничего не забыть.

Задача 1. На плоскости дан треугольник, все вершины которого имеют целые координаты. При этом других точек с целыми координатами он не содержит (ни внутри, ни на границе). Найдите площадь данного треугольника.

Задача 2. Пусть \mathbb{F} — конечное поле из q элементов. Найдите число подпространств в \mathbb{F}^n размерности k .

Задача 3. Пусть \mathbb{F} — конечное поле. Докажите, что для всякого отображения $h : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ существует такой многочлен $f \in \mathbb{F}[x]$, что $h(a) = f(a)$ для любого $a \in \mathbb{F}$.

Задача 4. Пусть p — простое число, а A — целочисленная $n \times n$ -матрица такая, что

$$A^p = I$$

(где I — единичная матрица), но при этом $A \neq I$. Докажите, что $n \geq p - 1$.

Задача 5. Докажите, что всякий непостоянный многочлен с целыми коэффициентами имеет корень в поле $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ для бесконечного множества простых чисел p .

Задача 6. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, а $I, J \subset R$ — два идеала в нём, такие что $R = I + J$. Докажите китайскую теорему об остатках:

$$R/IJ = R/I \oplus R/J.$$

Задача 7. Вокруг эллипсоида $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax^2 + by^2 + cz^2 = 1\}$ (где $a, b, c > 0$) описан прямоугольный параллелепипед. Найдите длину пространственной диагонали этого параллелепипеда.

Задача 8. Имеется 7 одинаковых банок, каждая из которых на $\frac{9}{10}$ заполнена краской, причём в каждой банке — свой цвет, и все цвета разные. Можно ли, переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое), получить хотя бы в одной из банок смесь, в которой все 7 красок смешаны в равной пропорции? (Выливать краску куда-либо, кроме банок, нельзя.)

Задача 9. Пусть $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ — попарно различные простые числа. Докажите, что $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$ линейно независимы над \mathbb{Q} .

Задача 10. Приведите пример области целостности, которая является кольцом главных идеалов, но не является евклидовым кольцом.