Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Листок e. Срок сдачи 28 ноября.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно на математическом практикуме. Настоятельно рекомендуется предварительно записывать решения, чтобы ничего не забыть.

Задача 1. Докажите, что любое (возможно бесконечное) семейство попарно коммутирующих линейных операторов на конечномерном векторном пространстве имеет общий собственный вектор.

Задача 2. Пусть A — вещественная $d \times n$-матрица, а $b \in \mathbb{R}^d$ — вектор-столбец. Через $x \in \mathbb{R}^n$ обозначается вектор-столбец, а через $y \in \mathbb{R}^d$ — вектор-строка. Докажите, что справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

1) существует решение задачи $Ax = b$, такое что $x \geq 0$ (то есть все координаты вектора x неотрицательны);

2) существует решение задачи $yA \leq 0$, такое что $yb > 0$.

Задача 3. Пусть A, B, C и D — симметрические 3×3 матрицы с комплексными коэффициентами. Докажите, что найдутся такие комплексные числа α, β, γ и δ, не равные одновременно нулю, что матрица $\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D$ имеет ранг не больше единицы.

Задача 4. *Квадратичной формой* от двух переменных называется многочлен $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Пусть $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Докажите, что если $m = q(k, l)$ для целых взаимно простых k и l, то *дискриминант* $b^2 - ac$ является квадратичным вычетом по модулю m.

Задача 5. Какие простые числа $p \in \mathbb{N}$ представляются в виде $x^2 + 5y^2$ для целых x и y?

Задача 6. Пусть $q(x, y)$ — квадратичная форма с целыми коэффициентами. Докажите тригрупповое свойство: если три целых числа представимы в виде значений формы q на целых числах, то и их произведение тоже представимо.

Задача 7. Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — однородное квадратичное отображение такое, что векторы $f(x)$ и x пропорциональны для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите, что $f(x) = l(x)x$ для некоторой линейной функции $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Задача 8. Пусть a, b, c, d — векторы с целыми координатами в $\mathbb{R}^4$, такие что $ka \wedge b = c \wedge d$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, но $a \wedge b \neq lv$ ни для какого $v \in \Lambda^2\mathbb{R}^4$ с целыми координатами и целого $l \neq \pm 1$. Докажите, что c, d представляются как линейные комбинации векторов a и b с целыми коэффициентами.

Задача 9. Пусть $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — два многочлена степеней m и n, соответственно, с коэффициентами в поле. Докажите теорему Безу: число решений системы $f(x, y) = g(x, y) = 0$ либо бесконечно, либо не превышает mn.

Задача 10. Пусть I_m — число различных неприводимых многочленов со старшим коэффициентом степени m надо конечным полем из q элементов. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[[x]]$ имеет место тождество

$$1 - qz = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - z^m)^{I_m}.$$