Желающие сдать досрочный экзамен за 2 модуль должны принести на него тетрадь с записью решений из этого списка. В нем, с учетом подпунктов, 24 задачи. Должны быть правильно решены 19 из них. Задачи и пункты со * оцениваются двукратно.

1. Доказать, что если функция дифференцируема на ограниченном интервале и не ограничена на нём, то её производная также не ограничена на этом интервале.

2. а) Доказать, что если все нули многочлена P_n действительны, то и все нули всех его производных $P_n', P_n'', \dots, P_n^{(n-1)}$ также действительны.

   б) Доказать, что функция $e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$ — многочлен, у которого все нули положительны.

3. Пусть функция f определена и дифференцируема на $\mathbb{R}^+$.

   а) Доказать, что если $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

   б) Доказать, что если $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, то $\varliminf\limits_{x\to\infty} |f'(x)| = 0$.

4. Докажите, что при $x > 0$
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

5. Докажите, что $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

6. Функция $f(x)$ называется выпуклой на отрезке $[a,b]$, если для любых $a \le x_1 < x_2 \le b$ и любого $\alpha \in [0,1]$: $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$. Докажите, что

   а) выпуклая ограниченная на отрезке функция непрерывна на нем;

   б)* выпуклая ограниченная на отрезке функция имеет односторонние производные в кждой точке отрезка.

7. Пусть $f(x)$ имеет отличную от нуля $(n+1)$-ю производную в нуле, так что
$$f(x) = f(0) + \dots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^n(\vartheta x)}{(n)!}x^n$$
   для некоторого $0 < \vartheta < 1$, зависящего от x. Докажите, что $\lim_{x\to 0} \vartheta = \frac{1}{n+1}$.

8. Пользуясь формулами Тэйлора, вычислите $\sqrt{10}$ с точностью до 10^{-4} и $\operatorname{arctg} 0,9$ с точностью до 10^{-3}. Приведите обоснованную численную оценку.

9. * Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-a,a)$ и все ее производные $f^{(n)}(x)$ неотрицательны при $|x| < a$. Докажите, что ее ряд Тэйлора в нуле сходится к значению функции в каждой точке интервала.

10. Исследовать на непрерывность функцию
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
    Описать кривые $f(x,y) = c$ при различных $c \geqslant 0$.

11. Пусть функция $\boldsymbol{F} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ дифференцируема и пусть $\boldsymbol{F}'(x) \neq 0$.

    а) Какое из двух утверждений верно:

    – существует $\xi \in [0,1]$ такое, что $\boldsymbol{F}(1) - \boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{F}'(\xi)$ или

    – существует $\xi \in [0,1]$ такое, что касательная к кривой $\boldsymbol{F}(t)$ параллельна вектору $(\boldsymbol{F}(1), \boldsymbol{F}(0))$?

    б) Тот же вопрос для $\boldsymbol{F} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

12. Пусть $u = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а f — дважды дифференцируемая функция. Пусть $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Доказать, что $\Delta u = F(r)$ и для некоторой функции $F(r)$. Найти эту функцию.

13. Постройте график кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = 2\cos\phi + 1$. Вычислите наклон касательных в точках пересечения с осью ординат и в особой точке кривой.

14. Постройте график кривой, заданной уравнением $x^3 + xy^2 - 2y^2 + 4xy = 0$. Найдите участки однозначности и монотонности многозначной функции $y(x)$. Вычислите наклон касательных в точках пересечения с осью $x = 1$ и в особой точке кривой.

15. Постройте график кривой, заданной параметрически, $x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3$. Найдите участки однозначности и участки монотонности многозначной функции $y(x)$. Исследуйте поведение в особой точке и асимптотики на бесконечности.

16. Пусть последовательность положительных чисел a_n монотонно убывает. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится или расходится одновременно с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Докажите и используйте этот факт для исследования сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a \log^b n}$, $a, b > 0$.

17. а) Пусть ряд $\sum a_n$, $a_n > 0$ сходится. Доказать, что найдется такая последовательность $b_n \to +\infty$, что ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.

    б) Пусть ряд $\sum a_n$, $a_n > 0$ расходится. Доказать, что найдется последовательность $b_n \to 0$ такая, что ряд $\sum a_n b_n$ также расходится.

18. а)* Доказать, что для любой последовательности a_n ограниченной вариации:

$$\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n := \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty,$$

    и любого сходящегося ряда $\sum b_n$ ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.

    б)* Доказать обратное утверждение: если последовательность a_n такова, что для любого сходящегося ряда $\sum b_n$ ряд $\sum a_n b_n$ также сходится, то последовательность a_n имеет ограниченную вариацию.