Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Зачёт 31 октября: Вариант I

факультет математики, НИУ ВШЭ

Зачёт продолжается 3 часа. Для получения полного балла достаточно решить любые 5 задач. Пожалуйста, пишите разборчиво. Можно пользоваться печатными и рукописными материалами. Нельзя пользоваться никакими электронными носителями информации.

Задача 1. Фальшивомонетчик напечатал по сотне купюр достоинством в 9 и 13 долларов. Сколькими способами он сможет заплатить без сдачи 500 долларов?

Задача 2. Найдите неприводимый над $\mathbb{Z}$ ненулевой многочлен $f \in \mathbb{Z}[x]$, корнем которого является комплексное число $\sqrt{2} + \sqrt{-3}$.

Задача 3. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ как вещественное векторное пространство. Представьте вектор x^3+1 как линейную комбинацию векторов $(x-1)(x-2)$, $(x-1)(x-3)$, $(x-2)(x-3)$ и $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Задача 4. Сколько элементов в кольце вычетов $\mathbb{Z}[i]/(3-2i)$?

Задача 5. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Докажите, что если в R выполнено тождество

$$(x+y)(x-y) = y^2 - x^2$$

(для любых двух элементов $x, y \in R$), то выполнено и тождество

$$x + x = 0$$

(для любого $x \in R$).

Задача 6. Для какого наименьшего натурального числа n существуют такие многочлены $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, что в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x]$ выполнено тождество

$$(x^3+x+1)f(x) + (3x^2+2)g(x) = n?$$