Прикладные методы анализа. Листок 2маг. Обобщенные функции двух переменных. Обязательные задачи:1,2,4,6,8а,б.

1. Покажите, что формула Стокса для плоскости

$$\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

(область D находится слева от контура ∂D при интегрировании по нему) может быть переписана в комплексных координатах $z = x + iy$ в виде равенств

$$\int_{\partial D} Adz = \iint_D \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz, \qquad \int_{\partial D} Ad\bar{z} = \iint_D \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge d\bar{z}$$

для любой функции $A(z) \in C^1(D)$. Здесь $d^2z \equiv dx \wedge dy = -\frac{1}{2i} dz \wedge d\bar{z}$,

2. Покажите, что функции $\ln|z|$ и $1/z$ локально интегрируемы по мере d^2z, и

$$\frac{\partial}{\partial z} \ln|z| = \frac{1}{2z} \qquad \text{в смысле обобщенных функций.}$$

Обобщенная функция (в смысле главного значения) $z^n \in \mathcal{S}'(\mathbb{C}) \equiv \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ определяется как функционал $(z^n, f(z)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{|z|>\varepsilon} z^n f(z) d^2z$ для $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$.

3. Покажите, что обобщенная функция z^{-2} корректно определена и для любой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{C})$

$$\left(z^{-2}, f\right) = \int_{|z|>1} \frac{d^2z}{z^2} f(z) + \int_{|z|<1} \frac{d^2z}{z^2} (f(z) - f(0)).$$

4. Доказать, что в смысле обобщенных функций $\frac{\partial}{\partial z}\left(z^{-1}\right) = -z^{-2}$.

5. Пусть Δ – область в $\mathbb{C}$, $\partial\Delta$ – ее граница, обходимая против часовой стрелки, $z \in \Delta$, f – комплекснозначная функция, дифференциируемая в замыкании $\bar{\Delta}$. Докажите интегральную формулу Коши-Грина:

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w-z} + \iint_\Delta \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} = \begin{cases} 2\pi i f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin D. \end{cases}$$

Для комплексного переменного $z = x + iy$ обобщенная функция $\delta(z)$ определяется как $\delta(z) = \delta(x)\delta(y)$, так что $(\delta(z), f) = f(0)$ для основных функций $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{C}) \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

6. Доказать, что

$$\text{а)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(z^{-1}\right) = \pi\delta(z); \qquad \text{б)} \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ln|z| = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}\delta(z).$$

7. а)* Предложите пример краевой задачи, для которой функция $G(z, z') = \frac{2}{\pi} \ln|z - z'|$ является функций Грина.

б) Найдите фундаментальное решение уравнения $(\partial_x + \partial_y)G(x, y) = \delta(x)\delta(y)$, сравните его с фундаментальным решением задачи 6а.

Пусть L – кривая на плоскости, заданная уравнением $f(x, y) = 0$ (считаем, что $\operatorname{grad} f$ всюду отличен от нуля). Определим обобщенную функцию $\delta(f(x, y)) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ правилом

$$(\delta(f), \varphi(x, y)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \iint_{0<f(x,y)<\varepsilon} \varphi(x, y) dxdy.$$

Эквивалентно, $\delta(f) = \frac{d}{d\varepsilon}\chi_{\{f \le \varepsilon\}}\big|_{\varepsilon=0}$, где χ_M –характеристическая функция множества M.

8. а) Докажите, что $(\delta(f), \varphi) = \int_L \varphi\omega$ для любой пробной функции $\varphi(x, y)$, где ω – произвольная 1-форма в окрестности L такая, что $df \wedge \omega = dx \wedge dy$. Выразите ω через dx и(или) dy. Покажите, что ограничение $\omega|_L$ однозначно определено.

   б) Зависит ли $\delta(f)$ от функции f или только от кривой L? Выпишите $(\delta(x^2 + y^2 - R^2), \varphi)$ и $(\delta(4x^2 + 4y^2 - 4R^2), \varphi)$ в виде однократных интегралов. Чем они отличаются от интеграла функции по длине соответствующей окружности?

   в) Покажите, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - c)dc = 1$ в смысле обобщенных функций.