Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 7.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. Постройте базис в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и в кольце кватернионов $\mathbb{H}$, рассматриваемых как векторные пространства над $\mathbb{R}$.

Задача 2. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в пространстве всех кососимметрических $n \times n$-матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 3. Для $\alpha \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}(\alpha)$ минимальное по включению подполе в $\mathbb{C}$, содержащее α. Найдите размерность $\mathbb{Q}(\alpha)$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$ для

(а) $\alpha = i$; (б) $\alpha = \sqrt[3]{2}$; (в) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; (г) $\alpha = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$; (д) $\alpha = \pi$

Выпишите матрицу оператора умножения на α в найденном базисе.

Задача 4. Пусть $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Постройте базис над $\mathbb{R}$ в векторном пространстве $\mathbb{R}[x]/(f)$. Выпишите матрицу оператора умножения на x в найденном базисе.

Задача 5. Выпишите матрицу оператора дифференцирования на пространстве многочленов степени не выше 3 в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$.

Задача 6. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ многочлены $x^3 + x + 2$ и $2x^2 + 1$ имеют общий корень над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 7. Пусть $A : V \to V$ — линейный оператор на векторном пространстве V, такой что $A^2 = A$. Докажите, что $V = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$, причём оператор A при ограничении на $\mathrm{Im}(A)$ действует как тождественный оператор.

Задача 8. Найдите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

Задача 9 (Формула Тейлора)**.** Для каждого $a \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a),\ f'(a), \ldots,\ f^{(n)}(a))$.

Задача 10 (Интерполяционная формула Лагранжа)**.** Для данного набора попарно различных точек $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$ постройте базис в пространстве вещественных многочленов степени не выше n, так чтобы каждый многочлен f в этом базисе имел координаты $(f(a_0),\ f(a_1), \ldots,\ f(a_n))$.