

Домашнее задание 7. Срок сдачи 15 ноября.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

Задача 1. Найдите размерность вещественного пространства симметрических $n \times n$ матриц с вещественными коэффициентами.

Задача 2. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на \mathbb{R} степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор сдвига $T_a : V \rightarrow V$ формулой:

$$(Tf)(x) = f(x + a).$$

Выпишите матрицу оператора T в базисе $\{1, x, x^2\}$.

Задача 3. Найдите два линейных оператора T и U на \mathbb{R}^2 , такие что $TU = 0$, но $UT \neq 0$.

Задача 4. Для каких простых чисел $p \in \mathbb{N}$ система уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 5. Пусть N — нильпотентный оператор на n -мерном векторном пространстве (то есть $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$). Докажите, что $N^n = 0$.