Листок 3. Представления групп: начало.

Алгебра, 2 курс, **06.11.2013**

Каждый пункт каждой задачи этого листка оценивается в 0.7 балла при сдаче решения не позже 20 ноября, и в 0.4 балла позже. Задачи со звездочкой вдвое дороже.

3◇1 **а)** Укажите какое-нибудь не вполне приводимое представление циклической группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ над каким-нибудь конечным полем. **б)** Укажите какое-нибудь не вполне приводимое комплексное представление группы $\mathbb{Z}$.

3◇2 Найдите все неприводимые представления циклической группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **а)** над $\mathbb{C}$; **б)** над $\mathbb{R}$.

3◇3 **а)** Докажите, что любой набор попарно коммутирующих операторов в конечномерном комплексном пространстве имеет общий собственный вектор. **б)** Докажите, что если все эти операторы диагонализуемы, то существует базис, в котором все они диагональны. **в)** Докажите, что всякое неприводимое конечномерное представление абелевой группы одномерно.

3◇4* **а)** Пусть G – конечная абелева группа. Докажите, что количество одномерных комплексных представлений группы G равно порядку группы G. *Указание:* разложите группу G в прямое произведение циклических. **б)** Докажите, что количество различных одномерных комплексных представлений произвольной конечной группы G равно порядку фактора группы G по ее коммутанту.

3◇5 Найдите все одномерные комплексные представления **а)** симметрической группы S_n; **б)** группы диэдра D_n.

3◇6 Докажите, что двумерное представление группы диэдра D_n симметриями n-угольника неприводимо.

3◇7 Докажите, что **а)** представление симметрической группы S_n симметриями $n-1$-мерного симплекса неприводимо; **б)** представление группы A_n вращениями $n-1$-мерного симплекса неприводимо при $n > 3$.

3◇8 Верно ли, что на любом комплексном представлении конечной группы G есть невырожденная инвариантная билинейная форма?

3◇9* Докажите, что инвариантное эрмитово скалярное произведение на неприводимом комплексном представлении конечной группы G единственно с точностью до пропорциональности.

3◇10 Постройте изоморфизм леворегулярного и праворегулярного представлений конечной группы G.

3◇11 **а)** Докажите, что всякое неприводимое представление конечной группы G входит в разложение его леворегулярного (а также праворегулярного) представления. *Указание:* постройте ненулевой гомоморфизм из регулярного представления в данное и воспользуйтесь леммой Шура. **б)** Докажите, что количество различных неприводимых представлений данной конечной группы конечно.

3◇12 Разложите в прямую сумму неприводимых леворегулярное представление группы S_3.