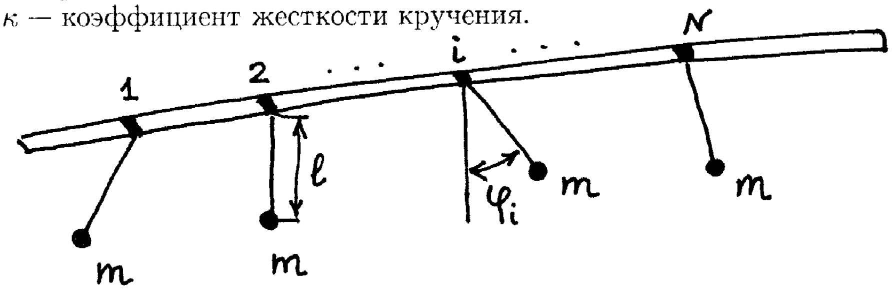
Механика и теория поля 2013.

Листок 5. Основные понятия теории поля.

1. На натянутом горизонтально резиновом жгуте закреплены на равных расстояниях друг от друга N одинаковых маятников. Маятники представляют собой невесомые стержни длины ℓ с точечной массой m на конце, и под действием силы тяжести они могут колебаться в плоскости перпендикулярной направлению жгута (см. рисунок). При этом жгут испытывает упругую деформацию кручения, потенциальная энергия которой имеет вид $U_{\text{круч.}} = \sum_i \frac{\kappa}{2}(\phi_{i+1} - \phi_i)^2$, где ϕ_i — угол отклонения i-го маятника от вертикального положения, κ — коэффициент жесткости кручения.



Запишите лагранжиан этой дискретной системы. Осуществите предельный переход $N \to \infty$ к непрерывной полевой модели, сделав разумные предположения о предельном поведении параметров ℓ, m и κ. Выпишите лагранжеву плотность и уравнение движения для полевой модели в общем случае и в пределе малых колебаний маятников.

2. Выведите и сравните уравнения движения для моделей свободной релятивистской струны, задаваемых действиями

$$\text{а)} \quad S[X^\mu] = -\int d\tau d\sigma \sqrt{(\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2 - (\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu)(\partial_\sigma X^\nu \partial_\sigma X_\nu)},$$

$$\text{б)} \quad S[X^\mu, g^{\alpha\beta}] = -\int d\tau d\sigma \sqrt{-g}\, g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu.$$

Здесь $X_\mu(\tau, \sigma)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ — координаты релятивистской струны в пространстве Минковского; τ, σ — координаты, параметризующие мировую поверхность струны; $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1$ (индекс 0 соответствует координате τ, индекс 1 – координате σ), — метрика на мировой поверхности струны; $g = \det ||g_{\alpha\beta}||$ (считается, что метрика индефинитна: $g < 0$).

(*) Постройте решения уравнений моделей а) и б).

3. Используя связь между алгеброй Ли группы Лоренца и алгеброй Ли $su(2) \oplus su(2)$, постройте матрицы генераторов бустов $K_i = L^{0i}$ и вращений $M_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} L^{jk}$ в линейном пространстве

$$\text{а)}\ V^{(1/2)} \otimes V^{(0)} = V^{(1/2,0)}; \qquad \text{б)}\ V^{(1/2)} \otimes V^{(1/2)} = V^{(1/2,1/2)}.$$

в базисе, содержащем вектор старшего веса.

Напоминание: коммутационные соотношения генераторов бустов и вращений имеют вид (см. задачу 3 из 2-го листка)

$$[M_i, M_j] = -\varepsilon_{ijs} M_s, \qquad [M_i, K_j] = -\varepsilon_{ijs} K_s, \qquad [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijs} M_s.$$

4. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие линейного пространства Минковского M_4 и линейного пространства эрмитовых 2×2 матриц:

$$M_4 \ni (x^0, x^1, x^2, x^3) \;\mapsto\; \hat{x} = \begin{pmatrix} x^0+x^3 & x^1-ix^2 \\ x^1+ix^2 & x^0-x^3 \end{pmatrix}.$$

Определим действие группы $SL(2,\mathbb{C})$ на пространстве эрмитовых матриц формулой

$$\hat{x} \mapsto \hat{x}' = U\,\hat{x}\,U^\dagger, \qquad (\star)$$

где комплексная 2×2 матрица $U \in SL(2,\mathbb{C})$ параметризуется 6 вещественными параметрами $\{a_k\}_{1\le k\le 3}$ и $\{b_k\}_{1\le k\le 3}$:

$$U(a,b) = \exp\left(\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k(a_k - ib_k)\right) \equiv \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}-i\vec{b})\right).$$

Матрицы Паули σ_k имеют вид:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Проверьте, что так определенное действие $(\star)$ группы $SL(2,\mathbb{C})$ индуцирует преобразование ограниченной (то есть, собственной ортохронной) группы Лоренца $L_+^\uparrow$ в пространстве Минковского: $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu\, x^\nu$.
(Подсказка: убедитесь в инвариантности интервала, проверьте что $SL(2,\mathbb{C})$ нет элементов, отвечающих несобственным и неортохронным преобразованиям Лоренца.)

б) Найдите связь параметров $\vec{a}$, $\vec{b}$ матрицы группы $SL(2,\mathbb{C})$ и параметров $\omega_{\mu\nu}$ соответствующего преобразования Лоренца $\quad x'^\mu = \Lambda(\omega)^\mu_\nu\, x^\nu, \quad \Lambda(\omega) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}L^{\mu\nu}\right).$

в) Вычислите параметры $\vec{a}$ и $\vec{b}$ для лоренцевского буста со скоростью $\vec{v}$ и для вращения в 3-мерном пространстве вокруг единичного вектора $\vec{n}$ на угол α.

5. Рассмотрим свободное вещественное скалярное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\,\phi^2.$$

Разложим решение уравнения Эйлера-Лагранжа на положительно и отрицательно частотные компоненты

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \qquad \phi^\pm(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^4}\,a^\pm(\vec{p})\,\frac{e^{\pm ipx}}{2p^0}\Big|_{p^0=\omega(\vec{p})}, \quad \omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}.$$

Выразите 4-вектор энергии-импульса поля P^μ в терминах функций $a^\pm(\vec{p})$. Вектор P^μ является интегралом по трехмерному пространству от соответствующей плотности

$$P^\mu = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T^{0\mu},$$

где $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля.

6. Рассмотрим систему 2 свободных комплексных скалярных полей $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2}\partial_\mu\phi_i^*\,\partial^\mu\phi_i.$$

Найдите все сохраняющиеся токи (в смысле теоремы Нетер) этой системы.

7. В двумерном пространстве Минковского с координатами x^0 и x^1 и метрикой $g = \mathrm{diag}(1, -1)$ рассмотрим скалярное поле со следующей лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\partial_\mu \phi\,\partial^\mu \phi - \frac{m^2}{\beta^2}\,(1 - \cos(\beta\,\phi)).$$

а) Найдите точное решение уравнений движения для поля ϕ в виде $\phi(x) = f(x^1 - vx^0)$ такое, что $\lim_{x^1 \to +\infty}(f(x^1) - f(-x^1)) = 2\pi/\beta$.

б) Вычислите энергию и импульс найденного в пункте а) решения.