В этом и последующих листках задачи, после номера которых стоит буква "b", являются бонусными. Это означает, что они не являются обязательными и не будут учитываться при вычислении оценки, а будут оцениваться отдельно в качестве дополнительных баллов.

3.1. Напомним (см. лекцию), что если $1 < p, q < +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$, то существует изометрический изоморфизм $\ell^q \xrightarrow{\sim} (\ell^p)^*$. Следуя той же схеме, постройте изометрические изоморфизмы **1)** $\ell^\infty \xrightarrow{\sim} (\ell^1)^*$; **2)** $\ell^1 \xrightarrow{\sim} (c_0)^*$. Можно ли тем же способом построить изометрический изоморфизм $\ell^1 \cong (\ell^\infty)^*$?

3.2. Опишите сопряженные к следующим операторам:
1) диагональный оператор в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
2) оператор правого сдвига в ℓ^p (где $1 \leqslant p < \infty$) или в c_0;
3) оператор двустороннего сдвига в $\ell^p(\mathbb{Z})$ (где $1 \leqslant p < \infty$) или в $c_0(\mathbb{Z})$;
4) оператор «первообразной» в $L^p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$ (см. задачу 2.12);
5) интегральный оператор Гильберта–Шмидта в $L^2(X, \mu)$ (см. задачу 2.14).

3.3. **1)** Докажите, что линейный функционал на нормированном пространстве ограничен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто. **2)** Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

3.4. Докажите, что на любом бесконечномерном нормированном пространстве существует разрывный линейный функционал.

Указание: воспользуйтесь тем, что в любом векторном пространстве есть алгебраический базис (т.е. максимальное линейно независимое подмножество).

3.5-b. Докажите, что c_0 не изоморфно сопряженному ни к какому нормированному пространству.

3.6. Пусть X — нормированное пространство.
1) Докажите, что если X^* сепарабельно, то и X сепарабельно.
2) Верно ли обратное?
3) Покажите, что не существует топологического изоморфизма между $(\ell^\infty)^*$ и ℓ^1.

3.7. Пусть $X = \mathbb{R}^2_p$ — плоскость, снабженная нормой $\|\cdot\|_p$, и пусть $X_0 = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset X$ — «ось абсцисс». Зададим функционал $f_0 \colon X_0 \to \mathbb{R}$ формулой $f_0(x, 0) = x$. Ясно, что $\|f_0\| = 1$. Сколько существует линейных функционалов на X, продолжающих f_0 и имеющих норму 1? (Рассмотрите всевозможные $p \in [1, +\infty]$.)

3.8. Пусть X — нормированное пространство, $x_1, \ldots, x_n \in X$ — линейно независимые векторы. Докажите, что для любого набора чисел $c_1, \ldots, c_n$ найдется такой $f \in X^*$, что $f(x_i) = c_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

3.9. Пусть X и Y — нормированные пространства, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство и $T_0 \colon X_0 \to Y$ — ограниченный линейный оператор.
1) Обязательно ли T_0 продолжается до ограниченного линейного оператора $T \colon X \to Y$?
2) Докажите, что для $Y = \ell^\infty(S)$ (где S — произвольное множество) ответ на предыдущий вопрос положителен.

3.10. **1)** Докажите, что любое нормированное пространство X изометрически вкладывается в $\ell^\infty(S)$ для некоторого множества S. (*Указание:* в качестве S можно взять единичный шар пространства X^*.) **2)** Докажите, что сепарабельное нормированное пространство X изометрически вкладывается в ℓ^∞.

3.11. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Докажите, что для любого оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X^{**} \arrow[r, "T^{**}"] & Y^{**} \\ X \arrow[u, "i_X"] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u, "i_Y"'] \end{tikzcd}$$

3.12. Докажите, что композиция канонического вложения $c_0 \to (c_0)^{**}$ и стандартного изоморфизма $(c_0)^{**} \cong \ell^\infty$ — это тождественное вложение c_0 в ℓ^∞.

3.13. Докажите, что
 1) гильбертово пространство рефлексивно;
 3) пространство c_0 нерефлексивно;
 4) пространство ℓ^1 нерефлексивно;
 5) пространство $L^1(X, \mu)$ нерефлексивно (за исключением случая, когда оно конечномерно);
 6) пространство $C[a, b]$ нерефлексивно.

3.14. Пусть X — нормированное пространство, $i_X \colon X \to X^{**}$ — каноническое вложение. Исследуйте взаимосвязь между операторами $i_{X^*} \colon X^* \to X^{***}$ и $i_X^* \colon X^{***} \to X^*$.

3.15. 1) Докажите, что банахово пространство X рефлексивно $\iff$ X^* рефлексивно.
2) Выведите отсюда нерефлексивность пространств ℓ^1, ℓ^∞, $L^\infty[a, b]$.

Определение 3.1. Пусть S — множество, $\ell^\infty(S)$ — пространство всех ограниченных $\mathbb{C}$-значных функций на X. Линейный функционал $m \colon \ell^\infty(S) \to \mathbb{C}$ называется *положительным*, если $m(f) \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$.

3.16-b. 1) Докажите, что положительный линейный функционал m на $\ell^\infty(S)$ ограничен, и что $\|m\| = m(1)$.
2) Докажите, что ограниченный линейный функционал m на $\ell^\infty(S)$, удовлетворяющий условию $\|m\| = m(1)$, положителен.

Указание. В п. 1 воспользуйтесь тем, что формула $\langle f, g \rangle = m(f\bar{g})$ задает неотрицательно определенную эрмитову форму на $\ell^\infty(S)$. В п. 2 достаточно показать, что если $\|m\| = m(1) = 1$, то для $f \geqslant 0$ число $m(f)$ принадлежит любому кругу, содержащему множество значений f.

Определение 3.2. Пусть G — полугруппа. Для любой функции f на G и любого $x \in G$ определим функцию $L_x f$ формулой $(L_x f)(y) = f(xy)$. Полугруппа G называется *аменабельной*, если на $\ell^\infty(G)$ существует положительный линейный функционал m, удовлетворяющий условиям $m(1) = 1$ и $m(L_x f) = m(f)$ для всех $f \in \ell^\infty(G)$ и всех $x \in G$. Любой такой функционал m называется *инвариантным средним.*

3.17-b. Докажите, что любая конечная группа аменабельна.

3.18-b. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ аменабельна.

3.19-b. Докажите, что полугруппа $\mathbb{N}$ аменабельна, причем для любого инвариантного среднего m на ℓ^∞ и любой сходящейся числовой последовательности $x = (x_n)$ справедливо равенство $m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

3.20-b. Докажите, что свободная группа с двумя образующими не аменабельна.