Листок 4. Производная

Анализ, 1 курс, **18.11.2013**

Срок сдачи листка 4 декабря.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее 20 баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

4◇1 Найдите производную функции $f(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+100)$ в точке $x = -1$.

4◇2 Докажите неравенства: **а^0)** $\sin x > x - x^3/6$ при $x > 0$; **б^0)** $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$, $\alpha > 1$, $x > -1$; **в)** $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, $\alpha > 2$, $x > 0$.

4◇3 Опишите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^2$ при любых $x, y \in \mathbb{R}$.

4◇4 Докажите, что производная четной дифференцируемой функции нечетна, а нечетной – четна.

4◇5^0 Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$. Верно ли, что $f(x)$ монотонно возрастает в некоторой окрестности x_0?

4◇6 **а^0)** Проверьте, что $f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем $f^{(n)}(0) = 0$.
б) Приведите пример бесконечно дифференцируемой функции, равной нулю вне заданного интервала и отличной от нуля внутри него.

4◇7 Пусть функция f определена и дифференцируема на $\mathbb{R}^+$. Докажите, что если $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, то $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

4◇8^0 **а)** Докажите, что если функция $f^{(n)}(x) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $f(x)$ – многочлен степени меньше n.
б) Докажите формулу Тейлора для многочленов: если $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, то при любом $x_0 \in \mathbb{R}$

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

4◇9 **а^0)** Функция f определена в окрестности нуля, дифференцируема в нуле n раз и $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$. Докажите, что $f(x) = o(x^n)$, $x \to 0$. **б)** Докажите, что для n раз дифференцируемой в точке x_0 функции имеет место формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \qquad x \to x_0.$$

(Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* с центром в точке x_0.)

4◇10 **а)** Докажите, что если все нули многочлена $P(x)$ степени n вещественные, то и все нули его производных $P'(x), \ldots, P^{(n-1)}(x)$ также вещественные.
б) Докажите, что функция $e^x \frac{d}{dx}(x^n e^{-x})$ – многочлен, у которого все нули положительные.

Говорят, что функция удовлетворяет *условию Липшица порядка 1 с константой C* или просто *условию Липшица* на промежутке I, если для всех $x, y \in I$ и некоторой константы C выполнено:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant C|y - x|.$$

4⋄11 **а)** Пусть f – дифференцируемая во всех точках интервала I функция. Докажите, что ее производная ограничена на I тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию Липшица.

б) Приведите пример функции, которая удовлетворяет условию Липшица на промежутке, но не дифференцируема на нем.

в) Докажите, что липшицева на I функция равномерно непрерывна на I.

г) Приведите пример равномерно непрерывной, но не липшицевой функции.

4⋄12 **а^0)** Докажите, что непрерывная функция на всей прямой, имеющая конечные пределы на бесконечности, равномерно непрерывна.

б) Приведите пример ограниченной непрерывной функции на интервале, не являющейся равномерно непрерывной.

4⋄13 Приведите пример дифференцируемой на отрезке функции, производная которой не является ограниченной функцией.

4⋄14 Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на отрезке $[a,b]$. **а)** Докажите, что $f'(x)$ принимает на отрезке $[a,b]$ все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$. **б)** Докажите, что у функции $f'(x)$ не может быть точек разрыва первого рода.

Функция $f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*) на на промежутке I, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

В случае, если выполнено обратное неравенство, функцию называют *вогнутой* или *выпуклой вверх.*

4⋄15 Докажите, что **а)** график выпуклой непрерывно дифференцируемой функции лежит выше любой касательной к нему; **б)** функция выпукла тогда и только тогда, когда для любых $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant b$ и любых неотрицательных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, сумма которых равна единице, выполнено неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \ldots + \alpha_n f(x_n);$$

в) выпуклая на интервале функция непрерывна на нем; **г)** выпуклая на интервале функция имеет односторонние производные в каждой точке отрезка.

4⋄16 **а^0)** Докажите, что функции $x \mapsto e^x$ и $x \mapsto -\ln x$ выпуклы вниз на $\mathbb{R}$. Выведите отсюда неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

б*) Докажите, что при $p > 1$ функция $x \mapsto x^p$ выпукла вниз при $x \geqslant 0$. Выведите отсюда неравенство Гельдера

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p > 1$.

4⋄17* Докажите, что производная дифференцируемой на всей прямой функции непрерывна хотя бы в одной точке.

4⋄18** Постройте пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.