Прикладные методы анализа. Листок 4. Аналитическое представление и преобразование Фурье обобщенных функций

Обязательные задачи: 1,2,3а-в,; 4а,б,г,д,ж,5,6а,6в. Срок сдачи - 19 ноября.

1. Пусть $z = x + iy \equiv re^{i\phi}$, где $r > 0$ (при $z \neq 0$) и $-\pi < \phi \leq \pi$. Обозначим $\phi = \arg z$.
   а) определим $\ln z$ как ветвь многозначной аналитической функции $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, определенную на комплексной плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси и совпадающую с элементарной функцией $\ln z$ для действительных положительных z. Покажите, что $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. Выразите $\ln z$ через элементарные функции переменных x, y.
   б) Верно ли, что $\ln z^2 = 2\ln z$ и $\ln|z|^2 = \ln z + \ln \overline{z}$?

2. Определим обобщенные функции $\ln(x + i0)$ и $\ln(x - i0)$ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ как пределы локально интегрируемых функций $\ln(x \pm i\varepsilon)$ переменной x при $\varepsilon \to 0$. Покажите, что

   а) $\ln(x + i0) + \ln(x - i0) = 2\ln|x|$, б) $\ln(x + i0) - \ln(x - i0) = -2\pi i\theta(-x)$,

   в) $(\ln(x \pm i0)' = \dfrac{1}{x \pm i0}$.

3. Найдите аналитические представления обобщенных функций на прямой (т.е., представьте обобщенные функции в виде разности функции, аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и функции, аналитической в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$):

   а) $\delta(x)$; б) $(x \pm i0)^{-1}$; в) $1/x$;
   г) $\ln|x|$; д) $\theta(x)$.

4. Найти Фурье-образы обобщенных функций

   а) e^{-ax^2}; б) $\dfrac{e^{ipx}}{x^2 + a^2}$; в) $\dfrac{\sin ax}{x}$; г) $\theta(x)$;

   д) $\delta(x - a)$; е) $(x \pm i0)^{-1}$; ж) $\dfrac{1}{x}$; з)* $\ln(x \pm i0)$.

5. а) Найдите фундаментальное решение оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (т.е., решение уравнения $u'_t - u''_{xx} = \delta(t)\delta(x)$, равное нулю при $t < 0$). *Указание*: примените преобразование Фурье по x.
   б) Найдите функцию Грина задачи Коши $u'_t - u''_{xx} = f(x, t)$ при $t > 0$; $u(x, 0) = 0$.

6. Пусть $a(t)$ – непрерывная функция.
   а) Покажите, что задача Коши $u' + a(t)u = f(t)$, $u(0) = u_0$, где $u(t) \in C^1[0, +\infty)$ эквивалентна задаче нахождения обобщенной функции $u(t)$ с носителем на полупрямой $[0, +\infty)$, удовлетворяющей уравнению
   $$u' + a(t)u = f(t)\theta(t) + u_0\delta(t);$$
   б)* Переформулируйте аналогичным образом задачу Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.
   в) Используйте результаты задач 5б) и 6а) для нахождения распределения температуры $u(x, T)$ в момент времени T, считая, что в момент времени $t = 0$ она распределена по закону $u(x, 0) = e^{-ax^2}$, и меняется со временем согласно уравнению теплопроводсти $u'_t - u''_{xx} = 0$.

7. Найдите пределы $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x}$ в смысле обобщенных функций $\mathcal{S}'$, где $\frac{e^{i\lambda x}}{x}$ понимается в смысле главного значения.

8. Пусть $f(x)$ – локально интегрируемая функция, растущая при $x \to \infty$ не быстрее полинома, $\hat{f}(\xi)$ – ее преобразование Фурье. Тогда аналитическое представление $\hat{f}(\xi)$ можно получить с помощью двух преобразований Лапласа. Используйте этот прием для получения аналитического представления преобразования Фурье функций $f(x) = x$ и $f(x) = |x|$.