Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 8.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ найдите собственные числа и собственные векторы оператора на $\mathbb{C}^2$, заданного в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите явную формулу, выражающую n-ое число Фибоначчи через n.

Задача 3. Для вещественной 2×2-матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2×2-матриц, действующего по формуле

$$T : X \mapsto AX.$$

Задача 4. Некоторый оператор T на векторном пространстве V удовлетворяет уравнению $T^2 = I$, где I — тождественный оператор.

(а) Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

(б) Докажите, что V раскладывается в прямую сумму собственных подпространств V^1 и V^{-1} оператора T.

Задача 5. (а) Докажите, что каждая 2×2-матрица A с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$ удовлетворяет квадратному уравнению

$$A^2 + pA + q = 0$$

для некоторых p, $q \in \mathbb{F}$. Выразите p и q через коэффициенты матрицы.

(б) Докажите, что каждая $n\times n$-матрица удовлетворяет полиномиальному уравнению степени не выше n.

Задача 6. Докажите, что собственные векторы оператора линейно независимы, если соответствующие им собственные значения попарно различны.

Задача 7. Пусть T линейный оператор на n-мерном векторном пространстве. Докажите, что

$$V \simeq \operatorname{Ker} T^n \oplus \operatorname{Im} T^n.$$

Задача 8 (Резольвента Лагранжа)**.** Пусть оператор T на векторном пространстве V (возможно бесконечномерном) удовлетворяет уравнению

$$(T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\cdots(T-\lambda_n I) = 0.$$

Обозначим через $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ многочлены степени $(n-1)$, такие что $f_i(\lambda_j) = 0$ при $i \neq j$, а $f_i(\lambda_i) = 1$ (то есть те самые многочлены, которые используются в интерполяционной формуле Лагранжа). Оператор $T_i := f_i(T)$ назвается *i-той резольвентой Лагранжа* оператора T. Докажите, что для любого вектора $v \in V$ выполняется тождество

$$v = T_1(v) + \ldots + T_n(v),$$

причём либо $T_i(v) = 0$, либо $T_i(v)$ — собственный вектор оператора T с собственным значением λ_i.