

## Механика и теория поля 2013.

Листок 6. Электромагнитное поле I: Кинематика. Заряд во внешнем поле.

---

1. Рассмотрим тензор напряженности электромагнитного поля  $F^{\mu\nu}$  и дуальный ему тензор  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}$  (здесь  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$  — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга,  $\varepsilon^{0123} = 1$ ).

- а) Выразите в терминах компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  лоренцевские инварианты электромагнитного поля:  $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  и  $\tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$ .
- б) Выразите пфаффиан кососимметрической  $4 \times 4$  матрицы  $F^{\mu\nu}$ :  $\text{Pf} F = \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$  ( $\det F = (\text{Pf} F)^2$ ) в терминах компонент векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ .

в) Для матрицы  $F^\mu{}_\nu = F^{\mu\rho} g_{\rho\nu}$

1) докажите соотношения  $\text{Tr} F^{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0$ ;

2) убедитесь, что лоренцевы скаляры  $\text{Tr} F^{2n}$ ,  $n \geq 2$ , алгебраически зависимы от  $\text{Tr} F^2 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$  и  $\text{Pf} F = F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$ .

**Указание:** воспользуйтесь соотношениями Ньютона, связывающими элементарные симметрические функции со степенными суммами.

2. Найдите закон преобразования компонент  $E^i$  и  $H^i$  однородного в пространстве и *постоянного* во времени электромагнитного поля при переходе в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси  $Ox$ .

3. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  не параллельны друг другу. Докажите, что *почти всегда* существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета относительно исходной системы. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения?

**Указание.** Рассмотрите лоренцевский буст вдоль прямой перпендикулярной к плоскости, натянутой на вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться лоренцевскими инвариантами, найденными в задаче 1.

4. В плоскости  $xOy$  может без трения двигаться материальная точка массы  $m$  и заряда  $e > 0$ . На материальную точку действует потенциальная сила с потенциальной энергией  $U(x, y) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2$  (двумерный гармонический осциллятор). Найдите решение уравнений движения осциллятора в случае, когда он помещен в постоянное и однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $Oz$ :  $\vec{H} = (0, 0, H)$ .

5. Релятивистская частица массы  $m$  и заряда  $e$  с начальным 3-импульсом  $\vec{p}_0 = (p_0, 0, 0)$  помещается

а) в постоянное однородное электрическое поле  $\vec{E} = (0, E, 0)$ ;

б) в постоянное однородное магнитное поле  $\vec{H} = (0, 0, H)$ ;

в) в постоянные однородные параллельные электрическое и магнитное поля  $\vec{E} = (0, 0, E)$ ,  $\vec{H} = (0, 0, H)$ .

Определите закон движения и траекторию частицы.