Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 9.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. Найдите собственные значения, собственные и корневые подпространства оператора, заданного матрицей

$$\text{(а)}\ \begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix};\quad \text{(б)}\ \begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix};\quad \text{(в)}\ \begin{pmatrix}2 & 6 & -15\\ 1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & -6\end{pmatrix};\quad \text{(г)}\ \begin{pmatrix}0 & -2 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задача 2. Найдите характеристический многочлен $n \times n$-матрицы

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \ddots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \ddots\end{pmatrix}$$

Задача 3. Выразите след и определитель квадратной матрицы через корни её характеристического многочлена.

Задача 4. Найдите формулу, выражающую коэффициенты характеристического многочлена $n \times n$-матрицы через коэффициенты самой матрицы для
(а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) произвольного n.

Задача 5. Характеристический многочлен оператора равен $(t-a)^2$. Докажите, что в некотором базисе этот оператор записывается одной из двух матриц: $\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

Задача 6. Верно ли, что если оператор A на конечномерном векторном пространстве имеет два линейно независимых собственных вектора с собственным значением λ, то λ — кратный корень характеристического многочлена оператора A? Верно ли обратное?

Задача 7. Докажите, что если все собственные числа квадратной матрицы равны нулю, то матрица нильпотентна.

Задача 8. Докажите, что два коммутирующих линейных оператора на конечномерном комплексном векторном пространстве имеют общий собственный вектор.

Задача 9. (а) Докажите, что вещественная 3×3-матрица имеет хотя бы одно вещественное собственное значение.

(б) Докажите, что все собственные значения вещественной симметрической 2×2-матрицы являются неотрицательными вещественными числами.

Задача 10. Пусть оператор A на $\mathbb{C}^n$ удовлетворяет уравнению $A^n = I$.

(а) Докажите, что все собственные числа оператора A являются степенями числа $\eta = \cos\frac{2\pi i}{n} + \sin\frac{2\pi i}{n}$.

(б) Докажите, что если все собственные числа оператора A равны η^k для некоторого $k \in \mathbb{N}$, то $A = \eta^k I$ (то есть, A — скалярный оператор).