1. Прикладные методы анализа. Листок 5. Асимптотические разложения

Обязательные задачи: 1а, 2,3а,3б,4а или 4б, 6а или 6б,7а или 7б, 8, 9а,10б. Срок сдачи - 10 декабря. Магистранты также обязаны сдать задачи 11а и 12.

1. а) Пусть δ – положительное число. Покажите, что $\operatorname{ch} z \sim e^z/2$ при $z \to \infty$ в секторе $|\arg z| < \pi/2 - \delta$, и что это не так в секторе $|\arg z| < \pi/2$.
   б) Покажите, что $e^{-\operatorname{sh} z} = o(1)$ при $z \to \infty$ в полуполосе $\operatorname{Re} z \geq 0$, $|\operatorname{Im} z| \leq \pi/2 - \delta$.

2. Покажите, что функции $z^n \log^m z$, где $m = 0, 1, 2$ а n - произвольное целое число, меньшее заданного, $n \leq N$, можно упорядочить в асимптотическую последовательность при $z \to \infty$, $|\arg z| < \pi$. Предъявите соответствующее асимптотическое разложение для функции $\log^2(1+z)$. Сходится ли оно?

3. а) Покажите, что функция e^z не допускает степенного асимптотического разложения при $z \to \infty$;
   б) укажите возможно больший сектор $\alpha < \arg z < \beta$, в котором функция e^z имеет нулевое степенное асимптотическое разложение при $z \to \infty$;
   в)* покажите, что если однозначная голоморфная в окрестности $z = \infty$ функция допускает в ней в ней асимптотическое разложение, $f(z) \sim \sum_{k=N}^{+\infty} a_k z^{-k}$, $z \to \infty$, то ∞ не есть существенно особая точка и, более того, для достаточно больших z ряд $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k z^{-k}$ сходится к $f(z)$.

4. Найдите асимптотику n-го положительного корня уравнения

   а) $x = \operatorname{ctg} x$ б) $\sin x = e^{-x}$

В каждом уравнении предложите асимптотическую последовательность из элементарных функций аргумента n, для которой возможно реккурентное нахождение коэффициентов асимптотического разложения корня. Найдите 3 первых члена разложения .

5. Исследуйте асимптотику(при большом положительном t) корня уравнения $x^2 = t + \log x$.

6. Найдите асимптотику интегралов при больших положительных x. Сходятся ли соответствующие асимптотические разложения? Предложите какую-либо оценку остаточного члена.

   а) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{int}}{t^a} dt,\ a > 1, n \in \mathbb{N}$ б) $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$

7. Найдите асимптотическое разложение при $z \to \infty$, $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2} - \delta$ интегралов двумя способами: интегрированием по частям и сведением к интегралам Лапласа или Фурье

   а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2 + z^2} dt,$ б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + z^2} dt$

8. Покажите, что $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-z \operatorname{sh} t} dt \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{((2k-1)!!)^2}{z^{2k+1}}$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$.

9. а) Покажите, что $\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \left(\dfrac{\pi}{2n}\right)^{1/2} \left(1 + O\left(n^{-1}\right)\right)$ при $n \to \infty$.

   б) Выведите отсюда формулу Валлиса $\pi = \displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$.

10. Найдите (главную) асимптотику

   а) функции Макдональда $K_\nu(z) = \frac{1}{2} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(\nu t - z \operatorname{ch} t) dt$, $\nu \in \mathbb{R}$, при $\operatorname{Re} z \to \infty$

   б) функции Бесселя $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\varphi - n\varphi) d\varphi$ при больших положительных x.

11. Функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$, $\nu \in \mathbb{C}$ может быть представлена интегралом

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_C e^{ix \sin w - i\nu w} dw,$$

где контур C проходит в полосе $0 < \operatorname{Re} w < \pi$, асимптотически приближаясь в начальной своей части к лучу $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w \to +\infty$ и в конечной своей части к лучу $\operatorname{Re} w = \pi$, $\operatorname{Im} w \to -\infty$. Покажите, что

а) $H_\nu^{(1)}(x) = \left(\dfrac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\exp i\left(x - \dfrac{\pi}{4}(2\nu + 1)\right) + O\left(\dfrac{1}{x}\right)\right), \qquad x \to +\infty$

б)* В каком секторе комплексного z верна эта асимптотика для функции $H_\nu^{(1)}(z)$?

12. Выведите асимптотическое разложение Эйлера:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} \sim \log N + \gamma - \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{2kN^{2k}}, \qquad N \to \infty.$$

Здесь B_n – числа Бернулли, $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$ – постоянная Эйлера.

13. Покажите, что $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \dfrac{2}{3} n^{3/2} + \dfrac{1}{2} n^{1/2} + C + \dfrac{1}{24 n^{1/2}} + O\left(\dfrac{1}{n^{5/2}}\right)$, где C - некоторая постоянная. Дайте определение этой постоянной и ее приблизительную оценку.