Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Листок 3. Срок сдачи 19 декабря.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно на математическом практикуме. Настоятельно рекомендуется предварительно записывать решения, чтобы ничего не забыть.

Задача 1. Докажите, что конечная группа содержит элемент порядка два тогда и только тогда, когда число элементов в группе чётно.

Задача 2. Вычислите суммарное количество инверсий у всех перестановок из S_n.

Задача 3. Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая — из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

Задача 4. Найдите все конечные группы (с точностью до изоморфизма), в которых есть ровно 3 класса сопряжённости.

Задача 5. В некоторой конечной группе можно выбрать по представителю в каждом классе сопряжённости так, что все они будут коммутировать. Докажите, что эта группа коммутативна. Останется ли утверждение задачи верным, если не требовать конечности группы?

Задача 6. Пусть p — простое число, а G — группа порядка p^n. Докажите, что в G есть подгруппа порядка p^m для каждого m, такого что $0 \leq m \leq n$.

Задача 7. Пусть V — векторное пространство размерности n, а подмножество $G \subset \mathrm{End}(V)$ порождает $\mathrm{End}(V)$ в том смысле, что всякий эндоморфизм представим в виде линейной комбинации произведений некоторого числа элементов из G. Какое минимальное число элементов может быть в G?

Задача 8. Пусть непрерывное отображение $D : \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям $D(AB) = D(A)D(B)$ и $D(\lambda \cdot \mathrm{Id}) = \lambda^n$ для любых $A, B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $D = \det$.

Задача 9. Докажите, что определитель каждой целочисленной кососимметрической матрицы является полным квадратом.

Задача 10. Постройте сюрьективный гомоморфизм из группы обратимых кватернионов в группу всех вращений трёхмерного вещественного пространства и найдите его ядро.

Задача 11. Найдите все конечные подгруппы в группе вращений трёхмерного вещественного пространства.

Задача 12. Докажите, что все конечные подгруппы в мультипликативной группе поля являются циклическими.