Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 10.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где
(а) $\chi = t^6 - 1$, $\mu = t^3 - 1$
(б) $\chi = (t-1)^2(t-2)^3$, $\mu = (t-1)(t-2)$
(в) $\chi = (t-1)^5(t-2)^5$, $\mu = (t-1)^2(t-2)^3$

Задача 2. Докажите, что если A — нильпотентный оператор на конечномерном векторном пространстве, а I — тождественный, то $\det(I + A) = 1$.

Задача 3. Пусть A_1 и A_2 — две матрицы одного и того же оператора (в разных базисах) на n-мерном пространстве. Докажите, что существует обратимая $n \times n$-матрица P, такая что

$$A_2 = PA_1P^{-1}.$$

Задача 4. Докажите, что для любой комплексной $n \times n$-матрицы можно найти сколь угодно близкую к ней диагонализуемую матрицу. Используйте этот факт, чтобы вывести теорему Гамильтона-Кэли для произвольных матриц из теоремы Гамильтона-Кэли для диагональных матриц.

Задача 5. Пусть A — оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве. Определим *экспоненту* e^A как оператор, равный сумме ряда

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

(а) Проверьте корректность определения.
(б) Докажите, что для диагонализуемого оператора с двумя различными собственными значениями a и b выполнена формула

$$e^A = \frac{ae^b - be^a}{a-b} I + \frac{e^a - e^b}{a-b} A.$$

Задача 6. Пусть A — оператор на конечномерном вещественном векторном пространстве. Докажите тождество

$$e^{\mathrm{tr}(A)} = \det(e^A).$$

Задача 7. Докажите, что всякий многочлен степени n со старшим коэффициентом 1 является характеристическим многочленом некоторого оператора.

Задача 8 (Фробениусова нормальная форма)**.** Докажите, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве над произвольным полем в некотором базисе может быть записан блочно-диагональной матрицей с квадратными блоками вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$