Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Домашнее задание 10. Срок сдачи 6 декабря.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

Задача 1. Найдите число обратимых линейных операторов на двумерном пространстве над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 2. Характеристический многочлен некоторого оператора равен $(t-1)^2(t-2)^2$, а минимальный равен $(t-1)^2(t-2)$. Какой вид может иметь жорданова нормальная форма этого оператора?

Задача 3. Пусть V — вещественное векторное пространство полиномиальных функций на $\mathbb{R}$ степени не выше два. Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим оператор $T_a : V \to V$ формулой:

$$(T_a f)(x) = f(ax + 1).$$

Найдите все собственные и корневые подпространства оператора T_a для каждого $a \in \mathbb{R}$.

Задача 4. Рассмотрим $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Определим оператор $M_a : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ умножения на $a \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ формулой:

$$M_a : x \mapsto ax.$$

Найдите характеристический многочлен оператора M_a для $a = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Задача 5. Докажите, что в конечномерном вещественном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет либо собственный вектор, либо инвариантное подпространство размерности 2.