Задачи, после номера которых стоит буква “B”, не являются обязательными. Решившие их получат бонусные баллы.

4.1. Рассмотрим композицию канонического вложения $\ell^1 \to (\ell^1)^{**}$ и стандартных изоморфизмов $(\ell^1)^{**} \cong (\ell^\infty)^* \cong M(2^{\mathbb{N}})$ (где $M(2^{\mathbb{N}})$ — пространство всех конечно аддитивных комплексных мер на $2^{\mathbb{N}}$). Опишите получившееся вложение ℓ^1 в $M(2^{\mathbb{N}})$ явной формулой и докажите, что его образ состоит в точности из σ-аддитивных мер.

4.2. Для каждого из следующих функционалов f на пространстве $C[-1,1]$ опишите соответствующую меру $\mu \in M[-1,1]$ и функцию ограниченной вариации $\varphi \in BV_0[-1,1]$. Вычислите вариацию $V_{-1}^1(\varphi)$ и убедитесь, что она равна $\|f\|$.

(a) $f(x) = x(-1)$; **(b)** $f(x) = x(-1/2) - x(1/2)$; **(c)** $f(x) = \int\limits_{-1/2}^{1} tx(t)\,dt - 2x(1)$.

4.3-B. Пусть (X,μ) — пространство с мерой. Зафиксируем $f \in L^1(X,\mu)$ и обозначим через ν_f комплексную меру с плотностью f относительно μ. Докажите, что $\|\nu_f\| = \|f\|_1$.

4.4. Докажите, что размерность бесконечномерного банахова пространства несчетна.

4.5. Приведите пример нормированного пространства X и поточечно ограниченной последовательности (f_n) в X^*, не ограниченной по норме.

4.6. Пусть X, Y, Z — нормированные пространства.
(a) Докажите, что билинейный оператор $T\colon X \times Y \to Z$ непрерывен тогда и только тогда, когда существует такое $C \geqslant 0$, что $\|T(x,y)\| \leqslant C\|x\|\|y\|$ для всех $x \in X,\ y \in Y$.
(b) Предположим, что X либо Y полно. Докажите, что любой раздельно непрерывный билинейный оператор $X \times Y \to Z$ непрерывен. (*Указание:* воспользуйтесь теоремой Банаха–Штейнгауза (принципом равномерной ограниченности)).
(c) Верно ли утверждение из п. (b) без предположения о полноте?

4.7-B. Пусть G — компактная топологическая группа и π — ее представление в банаховом пространстве X, непрерывное в том смысле, что отображение $G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto \pi(g)x$, непрерывно. Докажите, что на X существует эквивалентная норма, относительно которой все операторы $\pi(g)$ изометричны. (*Указание:* проще всего воспользоваться теоремой Банаха–Штейнгауза, хотя существует и «прямое» доказательство — см. контрольную за 1 модуль.)

4.8. (a) Выведите теорему об открытом отображении из теоремы об обратном операторе.
(b) Выведите теорему об обратном операторе из теоремы о замкнутом графике.
(c)-B Выведите теорему Банаха–Штейнгауза из теоремы о замкнутом графике.
(d)-B Для рефлексивных пространств выведите теорему об обратном операторе из теоремы Банаха–Штейнгауза.

Указание к (c). Исходя из поточечно ограниченного семейства $\{T_i\colon X \to Y \mid i \in I\}$ ограниченных линейных операторов, постройте оператор из X в пространство $\ell^\infty(I,Y)$ ограниченных Y-значных функций на I.

Указание к (d). Чтобы доказать, что биективный оператор $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ является топологическим изоморфизмом, достаточно проверить ограниченность прообраза единичного шара при отображении T^*.

4.9. Приведите пример банахова пространства X, нормированного пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, обратный к которому не является непрерывным.

4.10-B. (a) Приведите пример нормированного пространства X, банахова пространства Y и биективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, обратный к которому не является непрерывным.
(b) Приведите пример абсолютно выпуклого поглощающего множества в банаховом пространстве, не содержащего окрестности нуля.

4.11. Пусть X — нормированное пространство. Докажите, что **(a)** любое конечномерное подпространство и **(b)** любое замкнутое подпространство конечной коразмерности дополняемо в X.

4.12-B. Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.
Указание. Можно действовать следующим образом:
1) Докажите, что $\mathbb{N}$ можно представить в виде несчетного объединения $\mathbb{N} = \bigcup_{i \in I} A_i$ счетных множеств A_i так, что $A_i \cap A_j$ конечно при $i \neq j$. (Подсказка: вместо $\mathbb{N}$ удобнее брать $\mathbb{Q}$).
2) Докажите, что для каждого $f \in (\ell^\infty)^*$, обращающегося в нуль на c_0, множество тех $i \in I$, для которых $f(\chi_{A_i}) \neq 0$, не более чем счетно.
3) Докажите, что на ℓ^∞ / c_0 не существует счетного множества непрерывных линейных функционалов, разделяющего точки.
4) Докажите, что c_0 недополняемо в ℓ^∞.

4.13. (a) Докажите, что если банахово пространство X топологически изоморфно Y^* для некоторого банахова пространства Y, то оно дополняемо в X^{**}.
(b)-B Решите задачу 3.5-B с помощью п. (a) и задачи 4.12-B.

4.14. Пусть X и Y — банаховы пространства и $S \in \mathscr{B}(Y^*, X^*)$. Обязательно ли существует такой $T \in \mathscr{B}(X, Y)$, что $S = T^*$?

4.15. Отождествим $(\ell^1)^*$ с ℓ^∞ (см. задачу 3.1) и рассмотрим пространство c_0 как подмножество в $(\ell^1)^*$. Найдите ${}^\perp c_0$ и $({}^\perp c_0)^\perp$.

4.16. Пусть X — нерефлексивное банахово пространство. Покажите, что в X^* существует замкнутое векторное подпространство N, для которого $N \neq ({}^\perp N)^\perp$.

4.17. Придумайте пример инъективного оператора $T \in \mathscr{B}(X, Y)$ между банаховыми пространствами X и Y, такого, что $\operatorname{Im} T^*$ не плотен в X^*. (*Указание: X обязано быть нерефлексивным* — см. лекцию.) Как следствие, для нерефлексивных пространств равенство $\overline{\operatorname{Im}(T^*)} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$ может не выполняться.

4.18-B (*лемма Джонсона*). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(1) последовательность $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ точна и $\operatorname{Im} T$ замкнут;

(2) последовательность $Z^* \xrightarrow{T^*} Y^* \xrightarrow{S^*} X^*$ точна и $\operatorname{Im} S^*$ замкнут.

Как следствие, цепной комплекс банаховых пространств точен тогда и только тогда, когда точен его сопряженный комплекс.

4.19-B (*лемма Серра*). Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $S \in \mathscr{B}(X, Y)$, $T \in \mathscr{B}(Y, Z)$ и $TS = 0$. Предположим, что операторы S и T имеют замкнутые образы. Постройте изометрический изоморфизм $(\operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S)^* \cong \operatorname{Ker} S^* / \operatorname{Im} T^*$.

Как следствие, если C — цепной комплекс банаховых пространств, в котором все отображения $C_{n+1} \to C_n$ имеют замкнутые образы, то $H^n(C^*) \cong H_n(C)^*$.

4.20-B. Пусть X — банахово пространство и $X_0 \subseteq X$ — замкнутое векторное подпространство. Докажите, что X рефлексивно тогда и только тогда, когда X_0 и X/X_0 рефлексивны.