Механика и теория поля 2013.

Листок 7. Электромагнитное поле II:
Свободные электромагнитные волны. Поля в присутствии источников.

---

1. Рассмотрим 4-вектор потенциала электромагнитного поля $A^\mu(x) = (A^0, \vec{A})$ в кулоновской калибровке $A^0(x) = 0$, $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Уравнения Максвелла эволюции свободного электромагнитного поля допускают решение в виде плоской монохроматической волны

$$\vec{A}(x) = \mathrm{Re}\left(\vec{B}_0 \exp(-ik\cdot x)\right),$$

где $\vec{B}_0(x)$— постоянный 3-вектор (вообще говоря, с комплексными компонентами), а $k^\mu = (k^0, \vec{k})$ — постоянный 4-вектор.

а) Найдите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, отвечающих такому вектор-потенциалу.

б) Найдите все соотношения между векторами $\vec{k}$, $\vec{B}_0$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$, следующие из калибровочных условий и уравнений Максвелла. Докажите, в частности, что напряженности электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны друг другу и вектору $\vec{k}$.

в) Докажите, что в общем случае в любой фиксированной точке пространства векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ вращаются с постоянной угловой скоростью в плоскости перпендикулярной вектору $\vec{k}$, а их концы описывают эллипсы (так называемая, эллиптически поляризованная волна). При каких условиях на $\vec{B}_0$ получаются волны круговой и линейной поляризации.

г) Вычислите вектор Пойнтинга и покажите, что энергия плоской волны распространяется со скоростью света в направлении вектора $\vec{k}$.

2. Пользуясь интегральной формой уравнений Максвелла для поля $\vec{E}$ и учитывая симметрию распределения зарядов, вычислите напряженность поля и потенциал, создаваемые в пространстве бесконечным круговым цилиндром радиуса R, заряженным равномерно по объему с объемной плотностью заряда ρ. Рассмотрите также предел бесконечно тонкой прямой нити, равномерно заряженной с линейной плотностью заряда λ (предел $R \to 0$ при условии $\rho R^2 \to \lambda/\pi \neq 0$).

3. Найдите напряженность магнитного поля, создаваемого в пространстве бесконечно тонким постоянным током, текущим вдоль оси Oz: $\vec{j}(x,y,z) = (0, 0, I\delta(x)\delta(y))$.

4. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где a — постоянный положительный параметр.

5. В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\Box\, G(x) = \delta^{(3)}(x), \qquad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве M_3.

6. а) Заряд q колеблется вдоль оси Oz вокруг начала координат по закону

$$z(t) = R\cos(\omega t).$$

Полагая $R\omega \ll c$ (c — скорость света), найдите поле этого заряда на расстояниях $r \gg c/\omega$ (волновая зона) в первом неисчезающем порядке по отношению v/c, где v — скорость заряда.

б) В предположениях предыдущего пункта найдите поле в волновой зоне для заряда, равномерно вращающегося в плоскости xOy вокруг начала координат по закону:

$$x(t) = R\cos(\omega t), \qquad y(t) = R\sin(\omega t).$$

7. Точечный заряд $-q$ движется по окружности радиуса R вокруг закрепленного точечного заряда $q > 0$. Период обращения равен T. Определите среднюю за период обращения инегральную мощность дипольного излучения этой системы (то есть, суммарную мощность дипольного излучения по всем направлениям).