

Анализ 1. Дифференциальное исчисление одной переменной.
Индивидуальное письменное задание

Работа состоит из пяти задач. По k -ой задаче ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) студент выбирает задание под номером m ($m = 1, 2, \dots, 23$), где m вычисляется по следующей формуле:

$$m = 1 + (\text{остаток от деления числа } N + A^{B+k} \text{ на } 23),$$

где N — номер студента в списке курса в кондуите по анализу,
 A — число букв в имени студента, а B — число букв в его фамилии.

Работа в письменном виде сдается 17 декабря А.М. Красносельскому в перерыве между 3-ей и 4-ой парами (13 : 20 – 13 : 30) в аудитории 212. Решение каждой задачи должно сопровождаться подробными выкладками и объяснениями.

1. Построить график рациональной функции $y = \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+px+q}$:

- 1) $a = 1, b = 1, c = 0, d = -1, p = 0, q = -1$.
- 2) $a = 1, b = 1, c = 0, d = -4, p = 0, q = -4$.
- 3) $a = 1, b = 1, c = -3, d = 2, p = -3, q = 2$.
- 4) $a = 1, b = 1, c = -1, d = -2, p = -1, q = -2$.
- 5) $a = 1, b = -2, c = 0, d = 0, p = -2, q = 1$.
- 6) $a = 1, b = -1, c = 0, d = 0, p = 2, q = -1$.
- 7) $a = 1, b = 3, c = 3, d = 1, p = -2, q = 1$.
- 8) $a = -1, b = 2, c = 0, d = -6, p = 0, q = -3$.
- 9) $a = -2, b = 2, c = 0, d = -6, p = 0, q = -3$.
- 10) $a = -3, b = 2, c = 0, d = -6, p = 0, q = -3$.
- 11) $a = 3, b = -2, c = 0, d = 2, p = 0, q = -1$.
- 12) $a = 2, b = -1, c = -1, d = 6, p = 1, q = -6$.
- 13) $a = -2, b = 1, c = -1, d = 6, p = 1, q = -6$.
- 14) $a = 3, b = 3, c = -3, d = -6, p = -1, q = -2$.
- 15) $a = -3, b = -4, c = -4, d = 24, p = 1, q = -6$.
- 16) $a = 1, b = 1, c = 1, d = -2, p = 1, q = -2$.
- 17) $a = 2, b = -1, c = 3, d = -2, p = -3, q = 2$.
- 18) $a = 2, b = 1, c = -4, d = 3, p = -4, q = 3$.
- 19) $a = -2, b = -1, c = 2, d = 3, p = -2, q = -3$.
- 20) $a = -2, b = -4, c = -8, d = 12, p = 2, q = -3$.
- 21) $a = -2, b = -2, c = 10, d = -12, p = -5, q = 6$.
- 22) $a = 3, b = 4, c = -4, d = -24, p = -1, q = -6$.
- 23) $a = 1, b = 3, c = 15, d = 18, p = 5, q = 6$.

2. Вычислить предел двумя способами: а) используя формулы Тейлора;
б) с помощью правила Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - e^{-x} - 3x - 1}{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \ln(1+x) - 6x - 2x^3}{e^{-x} + x - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{-2} - \cos x - 2x}{x^2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x/2) \ln(1+x) - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^4}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos 2x - 2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x} + x - 1}{1 - \cos x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x - \operatorname{arctg} x}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2/2 + \sin x + \ln(1-x)}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + x + \ln(1-x)}{x - \operatorname{arctg} x}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - x^2/2}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(1-2x) + 2x + 2x^2}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+4x^2} - e^{2x} + 2x}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + x^2/2 - \sin x}{x^3}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - e^{-x} - 3x/2}{x^2}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin 2x + 2 \ln(1-x) + x^2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \ln(1+x) - \sin x}{x^3}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + \ln(1+2x) - 2x}{x^3}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\ln(1 - 2x) + e^{2x} - 1}$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x^2} - \ln(1 + x) + x - 1}{x^3}$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1 - x^2/2}{x^3}$$

3. Вычислите приближенно следующие величины, используя два ненулевых слагаемых в подходящем разложении Тейлора. Приведите численную оценку погрешности вычисления. Сколько членов разложения потребуется для достижения точности 0,01? В решении некоторых вариантов придется воспользоваться простыми грубыми оценками вида $2 < e < 3$, $1 < \sqrt{e} < 2$ и подобными им.

- 1) $\sqrt[3]{124}$
- 2) $\operatorname{arctg} 0,2$
- 3) $\ln 2$
- 4) $\operatorname{sh} 0,2$
- 5) $\operatorname{ch} 0,1$
- 6) $\operatorname{arctg} 1$
- 7) \sqrt{e}
- 8) $\operatorname{arcth} 0,2$
- 9) $\arcsin \frac{1}{2}$
- 10) $\operatorname{arsch} \frac{1}{2}$
- 11) $1, 1^{-4}$
- 12) $\sqrt{8}$
- 13) $1, 2^{-3}$
- 14) $0, 9^{-3}$
- 15) $\sqrt[3]{65}$
- 16) $\operatorname{arctg} 0,1$
- 17) $\ln 0,9$
- 18) $\sin 1$
- 19) $\cos 1$
- 20) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
- 21) $\operatorname{arcch} 1,5$
- 22) $\sqrt{63}$
- 23) $\arcsin 0,2$

4. Построить линию, заданную параметрически. Исследовать асимптотику на бесконечности и поведение в особых точках. Выделить участки однозначности и участки монотонности многозначной функции $y(x)$.

1) $x = (t + 1)^2 t, y = (t + 2)(t - 1)^2$.

2) $x = t^2 - 2t, y = t^2 - \ln(t^2)$.

3) $x = \frac{t^3}{t^2+1}, y = \frac{t^3-2t^2}{t^2+1}$.

4) $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t^3}{t-1}$.

5) $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, y = \frac{t}{t^4+1}$.

6) $x = t^4 - t^2, y = 2t^3 - 3t^2$.

7) $x = \frac{t^3+2}{t^2+1}, y = \frac{t^3}{t^2+1}$.

8) $x = \frac{1}{1-t^2}, y = \frac{t^2}{t+1}$.

9) $x = \frac{1}{4-t^2}, y = \frac{t^2+2}{t^2+1}$.

10) $x = te^t, y = te^{-t}$.

11) $x = t^2 - 2t, y = t^2 + \ln(t^2)$.

12) $x = \frac{t}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t-1}$.

13) $x = \frac{3+2t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3+t^2+1}{1+t^2}$.

14) $x = 1 + t - t^2, y = t(1 - t^2) + t^2$.

15) $x = 1 - 3t - t^2, y = t(1 - t^2) - 3t^2$.

16) $x = 1 - t^2, y = t(1 - t^2)$.

17) $x = \frac{t}{1-t^3}, y = \frac{t^2}{1-t^3}$.

18) $x = 1 - \frac{4}{1+t^2}, y = t(1 - \frac{4}{1+t^2})$.

19) $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = \sin t - \sin 2t$.

20) $x = 1 + \cos t, y = \frac{1}{1+\sin t}$.

21) $x = \frac{\sin 3t}{\sin t}, y = \frac{\sin 3t}{\cos t}$.

22) $x = 3 \cos t + \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t$.

23) $x = \cos 2t + \sin 2t, y = \sin t$.

5. Построить кривую, заданную уравнением. Исследовать асимптотику на бесконечности и поведение в особых точках. Выделить участки однозначности и участки монотонности многозначной функции $y(x)$.

1) $x^3 + y^3 = x - y^2$

2) $x^5 + y^5 = 5xy$

3) $y^5 + x^4 = xy^2$

4) $x^4 + y^4 = 4xy$

5) $y^3 - x^2y + x^5 = 0$

6) $x^3y^3 = x - y$

7) $x^3 - xy^2 - y^5 = 0$

8) $x^6 + y^6 = 6xy^4$

9) $x^3 - xy^2 + 2y^5 = 0$

10) $x^8 + y^8 = 8x^3y^2$

11) $x^5 - y^4 - xy^3 = 0$

12) $x^3 - y^4 + x^2y = 0$

13) $x^3 + y^4 - 2x^2y = 0$

14) $x^3 + y^3 = 2x^2 - y^2$

15) $y^2 - xy^2 - y^3 - x^3 = 0$

16) $x^8 + y^8 = 8x^5y$

17) $y^2 - xy^2 - y^3 + 3x^3 = 0$

18) $3y - 3x^2y - y^3 + 3x^3 = 0$

19) $3y - 3x^2y - y^3 + 2x^6$

20) $x^6 + y^6 = 3x^2y^2$

21) $x^8 + y^8 = 8x^3y$

22) $x^8 + y^8 = 8x^3y^3$

23) $x^6 + y^6 = 6xy^2$