

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ — I

## Вопросы к коллоквиуму 13.12.2013

1. Ограниченные линейные операторы, их эквивалентные определения, ограниченность и непрерывность. Норма ограниченного линейного оператора. Примеры вычисления норм операторов.
2. Ограниченные линейные операторы, их эквивалентные определения, ограниченность и непрерывность. Мажорирование и эквивалентность норм. Эквивалентность норм на конечномерном векторном пространстве.
3. Топологически инъективные и открытые операторы. Изометрии и коизометрии.
4. Факторпространства нормированных пространств. Универсальное свойство факторпространств и его следствия.
5. Банаховы пространства. Примеры. Полнота пространства  $\ell^p$ .
6. Полнота факторпространств и пространств ограниченных линейных операторов. Теорема о продолжении линейных операторов «по непрерывности».
7. Пополнение нормированного пространства. Его существование, универсальное свойство, единственность и функториальность.
8. Полуторалинейные формы. Пространства со скалярным произведением: определение и примеры. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Норма, порожденная скалярным произведением. Гильбертовы пространства: определение и примеры.
9. Ортогональное дополнение подмножества в пространстве со скалярным произведением. Простейшие свойства ортогональных дополнений. Проекция вектора на подпространство. Единственность проекции и ее интерпретация как ближайшего элемента. Теорема о существовании проекции в гильбертовом пространстве. Теорема об ортогональном дополнении.
10. Ортогональные и ортонормированные системы. Примеры. Коэффициенты Фурье и их свойства. Неравенство Бесселя. Единственность ряда Фурье. Равенство Парсеваля.
11. Ортонормированные базисы, тотальные и максимальные ортонормированные системы, связь между этими понятиями. Существование ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве. Его построение в сепарабельном случае с помощью ортогонализации.
12. Описание гильбертовых пространств как пространств  $\ell^2(I)$ . Теорема Рисса–Фишера. Гильбертова размерность. Теорема о классификации гильбертовых пространств.
13. Пространство, сопряженное к нормированному пространству. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Теорема Рисса о сопряженном к гильбертову пространству.
14. Пространство, сопряженное к нормированному пространству. Сопряженный оператор. Свойства операции сопряжения. Пространства, сопряженные к  $\ell^p$  и  $L^p(X, \mu)$ .

15. Теорема Хана–Банаха и ее следствия.
16. Каноническое вложение во второе сопряженное. Его естественность. Рефлексивные банаховы пространства. Примеры.
17. Вариация комплексной меры. Пространство комплексных мер ограниченной вариации. Интеграл ограниченной измеримой функции по комплексной мере. Пространство, сопряженное к пространству ограниченных измеримых функций. Регулярные борелевские меры. Теорема Рисса–Маркова–Какутани (без доказательства).
18. Функции ограниченной вариации на отрезке и их свойства. Функция распределения борелевской меры на отрезке. Описание борелевских мер на отрезке как мер Лебега–Стилтьеса.
19. Теорема Рисса о пространстве, сопряженном к  $C[a, b]$ .
20. Теорема Бэра. Бочки в нормированных пространствах. Лемма о бочке (бочки и окрестности нуля в банаховом пространстве).
21. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) и его следствия.
22. Теоремы Банаха об открытом отображении, об обратном операторе и о замкнутом графике.
23. Топологические прямые суммы и дополняемые подпространства. Дополняемость конечномерных подпространств и замкнутых подпространств конечной коразмерности.
24. Аннуляторы, преданнуляторы и их свойства. Совпадение преданнулятора аннулятора подмножества с замыканием его линейной оболочки. Описание сопряженных к подпространствам и к факторпространствам.
25. Двойственность между инъективными операторами и операторами с плотным образом. Двойственность между топологически инъективными и сюръективными операторами. Эквивалентность замкнутости образа оператора и его сопряженного, двойственность ядер и коядер.
26. Спектр элемента алгебры. Спектры элементов алгебр  $\mathbb{C}^S$ ,  $\ell^\infty(S)$ ,  $L^\infty(X, \mu)$ . Поведение спектра при гомоморфизмах. Спектрально инвариантные подалгебры. Теорема об отображении спектра для полиномиального исчисления. Спектр обратного элемента.
27. Банаховы алгебры; примеры. Свойства группы обратимых элементов банаховой алгебры. Компактность спектра элемента банаховой алгебры.
28. Резольвентная функция и ее свойства. Непустота спектра элемента банаховой алгебры. Теорема Гельфанда–Мазура.
29. Спектральный радиус. Формула Бёрлинга.
30. Спектр оператора умножения. Спектр сдвига в  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Части спектра линейного оператора (точечный, непрерывный и остаточный спектры). Части спектра диагонального оператора.
31. Спектр сопряженного оператора. Части спектра сопряженного оператора. Части спектра для операторов левого и правого сдвига в  $\ell^p$  (рефлексивный случай).