ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

ЛИСТОК 5: КОГОМОЛОГИИ ГОЛОМОРФНЫХ И МЕРОМОРФНЫХ ПУЧКОВ

Осень 2013 года

$\overline{\partial}$-лемма Пуанкаре утверждает, что для любой (p,q)-формы ψ, $q \geqslant 1$, вещественно гладкой в поликольце $\{(z_1,\ldots,z_n) : a_i < |z_i| < b_i\}$, $-\infty \leqslant a_1,\ldots,a_n < \infty$, $0 < b_1,\ldots,b_n \leqslant \infty$ и удовлетворяющей уравнению $\overline{\partial}\psi = 0$, найдется вещественно-гладкая $(p,\, q-1)$-форма ϕ в том же поликольце, удовлетворяющая уравнению $\overline{\partial}\phi = \psi$. При решении задач этого листка можно пользоваться этим результатом.

Задача 1. Вычислите когомологии пучков $\mathcal{O}(m)$ на проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ для а) $n = 1$ и произвольного m; б) $n = 2$ и $m = 0$; в) $n = 2$ и $m \geqslant 0$; г) $n = 2$ и произвольного m; д) произвольных n и m. (Указание: покройте $\mathbb{C}P^n$ аффинными картами $\{z_i \neq 0\}$ и пользуйтесь теоремой Лере о вычислении когомологий пучков по Чеху.)

Задача 2. а) Вложите пучок $\mathcal{O}(m)$ на $\mathbb{C}P^n$ в качестве подпучка в пучок $\mathcal{O}(m+1)$ и вычислите факторпучок. б) Выпишите соответствующую длинную точную последовательность когомологий.

Задача 3. а) Пусть T обозначает пучок сечений голоморфного касательного расслоения к $\mathbb{C}P^n$. Постройте точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

на $\mathbb{C}P^n$. б) Вычислите когомологии $H^*(\mathbb{C}P^n, T)$.

в) Вычислите когомологии пучков $T(m) = T \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m)$ на $\mathbb{C}P^n$.

г) Вычислите когомологии пучка бивекторных полей $\bigwedge^2_{\mathcal{O}} T$ на $\mathbb{C}P^n$.

Задача 4. Рассмотрите пучок сечений ограничения касательного расслоения к $\mathbb{C}P^n$ на прямую $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$. Представьте этот пучок на $\mathbb{C}P^1$ в виде прямой суммы пучков $\mathcal{O}(m)$.

Задача 5. Пусть Ω^p обозначает пучок голоморфных p-форм на $\mathbb{C}P^n$; $\Omega^p(m) = \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m)$. Вычислите когомологии

а) $H^*(\mathbb{C}P^1, \Omega^1)$; б) $H^*(\mathbb{C}P^2, \Omega^1)$; в) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^1)$; г) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^1(m))$;

д) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1)$; е) $H^*(\mathbb{C}P^2, \Omega^2)$; ж) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^2)$; з) $H^*(\mathbb{C}P^n, \Omega^p)$.

Задача 6. Пусть $\mathcal{F}_\alpha$ — семейство пучков абелевых групп на топологическом пространстве X, занумерованных индексами $\alpha \in I$, где I — некоторое множество.

а) Покажите, что предпучок, сопоставляющий открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ (бесконечное произведение групп $\mathcal{F}_\alpha(U)$) является пучком на X.

б) Приведите контрпример, показывающий, что предпучок, сопоставляющий открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ (бесконечную прямую сумму групп $\mathcal{F}_\alpha(U)$) может не быть пучком на X.

Пучок $U \longmapsto \prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ называется (бесконечным) *произведением* $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ пучков $\mathcal{F}_\alpha$. Пучок, ассоциированный с предпучком $U \longmapsto \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha(U)$ называется (бесконечной) *прямой суммой* $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ пучков $\mathcal{F}_\alpha$.

в) Покажите, что $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ является подпучком в $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$.

г) Вычислите слой пучка $\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$ в точке $x \in X$ в терминах слоев пучков $\mathcal{F}_\alpha$. Справедливо ли аналогичное описание слоя пучка $\prod_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$?

д) Убедитесь, что пучок произвольных (разрывных) сечений накрытия, связанного с предпучком $\mathcal{P}$ на X, использовавшийся в лекциях — является бесконечным произведением пучков-небоскребов по всем точкам $x \in X$.

Задача 7. Пусть X — одномерное комплексное многообразие (риманова поверхность). Обозначим через $\mathcal{M}$ пучок, сопоставляющий каждому открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу (или комплексное векторное пространство) всех мероморфных функций на U (по сложению).

а) Вычислите факторпучок $\mathcal{M}/\mathcal{O}$, представив его в виде бесконечной прямой суммы пучков-небоскребов по всем точкам $x \in X$. б) Покажите, что пучок $\mathcal{M}/\mathcal{O}$ мягкий.

в) Вычислите пространства когомологий $H^*(X, \mathcal{M})$ для $X = \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, диска $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{C}P^1$. г) Выпишите длинную точную последовательность когомологий, связанную с короткой точной последовательностью пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

для пространств X из пункта в). Какую теорему из комплексного анализа вы таким образом доказали?

Задача 8. 1) Выпишите длинную точную последовательность, связанную с экспоненциальной последовательностью пучков

$$0 \longrightarrow 2\pi i\,\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow 1$$

на X и вычислите группы когомологий $H^*(X, \mathcal{O}^*)$ пучка обратимых голоморфных функций $\mathcal{O}^*$ (по умножению) для пространства $X =$

а) $\mathbb{C}$; б) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$; в) $\mathbb{C}P^1$; г) $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$; д) $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$; е) $\mathbb{C}P^2$; ж) $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.

Согласно лекционному курсу (теорема 12.2 из книжки), между элементами группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ и классами изоморфизма голоморфных линейных расслоений на комплексном многообразии X имеется взаимно-однозначное соответствие.

2) Опишите линейные расслоения на пространствах X из предыдущего списка, связанные со всеми элементами вычисленных групп $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.

Задача 9. Пусть снова X — одномерное комплексное многообразие. Обозначим через $\mathcal{M}^*$ пучок, сопоставляющий каждому открытому подмножеству $U \subset X$ абелеву группу всех мероморфных функций на U, не зануляющихся тождественно ни на какой связной компоненте U (по умножению).

а) Вычислите факторпучок $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$, представив его в виде бесконечной прямой суммы пучков-небоскребов по всем точкам $x \in X$. б) Покажите, что пучок $\mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ мягкий.

в) Предложите интерпретацию группы $H^1(X, \mathcal{M}^*)$ и отображения

$$\phi\colon H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}^*)$$

в терминах, подобных интерпретации элементов группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ как классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений. Какое свойство голоморфного линейного расслоения выражается условием, что соответствующий ему элемент группы когомологий лежит в ядре отображения ϕ? г) Опишите в явном виде граничное отображение

$$\psi\colon H^0(X, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*),$$

используя интерпретацию элементов группы $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ как классов изоморфизма голоморфных линейных расслоений на X.

д) Вычислите группы когомологий $H^*(X, \mathcal{M}^*)$ для $X = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, диска $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{C}P^1$. е) Выпишите длинную точную последовательность когомологий, связанную с короткой точной последовательностью пучков

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{M}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \longrightarrow 1$$

для пространств X из пункта д). Какие теоремы из комплексного анализа вы таким образом доказали?