Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 11.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. Группа движений плоскости действует на множестве треугольников.
(а) Найдите орбиты этого действия.
(б) Для каждого треугольника найдите его стабилизатор (=группу симметрий).
(в) Докажите, что группа симметрий равностороннего треугольника изоморфна S_3.

Задача 2. Рассмотрим действие группы $GL_2(\mathbb{C})$ сопряжениями на 2×2-матрицах:

$$(g, A) \mapsto gAg^{-1}.$$

Опишите все орбиты этого действия.

Задача 3. Пусть $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ — группа всех обратимых вычетов по модулю n по умножению.
(а) Докажите, что $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера.
(б) Докажите, что если m и n взаимно просты, то $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.
(в) При каких n группа $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ является циклической?

Задача 4. Найдите *группу диэдра* D_n (=группу симметрий правильного n-угольника).

Задача 5. (а) Пусть G — конечная подгруппа группы движений плоскости. Докажите, что все элементы $g \in G$ имеют общую неподвижную точку x (то есть $g(x) = x$ для каждого $g \in G$).
(б) Классифицируйте все конечные подгруппы в группе движений плоскости.

Задача 6. Докажите, что группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих данный куб, изморфна S_4.

Задача 7. (а) Опишите все перестановки в S_n, которые могут быть разложены в произведение (возможно пересекающихся) циклов длины три.
(б) При каких k в группе S_n найдётся перестановка с числом инверсий равным k?

Задача 8. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильный додекаэдр.
(а) Рассмотрим три действия группы G: на множестве вершин, рёбер и граней додекаэдра. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.
(б) Найдите порядок группы G.
(в) Докажите, что G изоморфна A_5.

Задача 9. Найдите число элементов в группе обратимых $n \times n$ матриц над полем из p элементов.

Задача 10 (Теорема Бернсайда)**.** (а) Пусть конечная группа G действует на множестве X. Докажите, что число орбит $|X/G|$ равно среднему числу неподвижных точек элемента группы G, то есть

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|,$$

где $X^g = \{x \in X \mid g(x) = x\}$.
(б) Найдите число разных способов покрасить грани куба в три цвета. Две раскраски счиаются разными, если одна не получается из другой вращением куба.