# Пучки и гомологическая алгебра

**С.М.Натанзон**

Содержание



## 1. Введение.

Хорошо известно, что непостоянная функция, голоморфная на комплексной плоскости, неограничена. Другими словами, в некоторых случаях по локальным свойствам функций (например голоморфность) можно судить о ее глобальных свойствах. Взаимосвязь локальных и глобальных свойств позволяет исследовать явление в целом стартуя с его, локальных, обычно проще контролируемых, свойств.

Необходимый для этого математический аппарат был создан в середине прошлого века. Он основан на *теории пучков*. Свойства пучков автоматизируют свойства тензорных полей на многообразиях. Пучкам отвечают коммутативные группы, называемые *группами когомологий со значениями в пучке*, и специальные элементы групп когомологий многообразия со значениями в постоянном пучке, называемые *классами Черна.* Группы когомологий и классы Черна определяют важнейшие фундаментальные свойства многообразия. Эти понятия являются основным языком всех разделов современной геометрии. Настоящий курс является введением в теорию пучков и связанных с ней структур.

Первая часть курса посвящена когомологиям со значениями в пучках. Мы даем несколько по виду совершенно не похожих друг на друга конструкций когомологий: с помощью ацикличных резольвент, через семейства покрытий (когомологии Чеха) и, для гладких многообразий, с помощью дифференциальных форм (когомологии де Рама) и сингулярных коцепей (сингулярные когомологии). Мы доказываем что все эти конструкции приводят к одинаковым группам когомологий (теоремы Лере и де Рама). Более того, мы показываем, что когомологии реализуют единственный естественный функтор из категории пучков абелевых групп в категорию абелевых групп, переводящий короткую точную последовательность пучков в длинную точную последовательность групп.

Вторая часть курса посвящена самому "массовому"типу пучков: локально свободным пучкам, то есть пучкам сечений локально тривиальных векторных расслоений. Мы определяем и исследуем универсальное расслоение. Далее мы изучаем простейшие свойства пучков и расслоений на комплексных многообразиях, их когомологии Дольбо и числа Ходжа. В заключении мы подробно обсуждаем замечательные свойства голоморфных расслоения ранга 1 .

## 2. Пучки.

2.1. **Основные определения.** Напомним, что *топологическим пространством* называется множество $X$ с системой подмножеств $\mathfrak{U} = \{U\}$ такой, что

1) $X, \emptyset \in \mathfrak{U}$,

2) объединение $\bigcup U_\alpha$ произвольного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$,

2) пересечение $\bigcap U_\alpha$ конечного числа $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Подмножества из $\mathfrak{U}$ называются *открытыми множествами.* Дополнение $X - U$ к отрытому множеству $U \in \mathfrak{U}$ называется *замкнутым множеством.*

*Предпучком* $\mathcal{F}$ *над топологическом пространством* $(X, \mathfrak{U})$ называется

a) набор множеств $\{\mathcal{F}(U) | U \in \mathfrak{U}, U \neq \emptyset\}$, называемый *сечениями над* $U$,

b) набор отображений $\{r^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) | \ U, V \in \mathfrak{U}, V \subset U\}$, называемых *ограничениями*, такой, что

1)$r^U_U = 1_U$ — тождественное отображение;

2)$r^U_W = r^V_W r^U_V$ при $W \subset V \subset U$.

Предпучок $\mathcal{F}$ называется *предпучком групп (колец, модулей и т.п)*, если все множества $\mathcal{F}(U)$ являются группами (соответственно кольцами, модулями и т.п) и все отображения $r^U_V$ являются гомоморфизмами соответствующих структур.

*Пучком* называется предпучок $\mathcal{F}$, в котором выполнены следующие аксиомы:

1) Пусть $U = \bigcup U_i$, $s, t \in \mathcal{F}(U)$ и $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ для всех $U_i$. Тогда $s = t$.

2) Пусть $U = \bigcup U_i$, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ и $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ для всех $i, j$. Тогда существует $s \in \mathcal{F}(U)$ такое, что $r^U_{U_i}(s) = s_i$.

**Пример 2.1.** *Пучок отображений множества $X$ в множество $Y$. Здесь $\mathcal{F}(U)$ — множество всех отображений множества $U$ в множество $Y$, а $r^U_V$ — ограничение отображения на подмножество. Если все множество $Y$ является группой (соответственно кольцом, модулем и т.п), то возникает пучок групп (соответственно колец, модулей и т.п).*

**Пример 2.2.** *Если в предыдущем примере в качестве $\mathcal{F}(U)$ рассматривать лишь локально постоянные отображения, то возникает пучок, называемый постоянным. (Напомним: локально постоянное отображение — это отображение, постоянное в некоторой окрестности каждой точки.)*

**Пример 2.3.** *Если в примере 2.1 считать, что $Y$ — топологическое пространство и $\mathcal{F}(U)$ — непрерывные функции, то возникает пучок непрерывных отображений.*

**Пример 2.4.** *Если в примере 2.3 считать, что $X$ — гладкое многообразие, $Y$ — поле вещественных чисел и $\mathcal{F}(U)$ — гладкие функции, то возникает пучок гладких функций.*

**Пример 2.5.** *Если в примере 2.3 считать, что $X$ — комплексное многообразие, $Y$ — поле комплексных чисел и $\mathcal{F}(U)$ — голоморфные функции, то возникает пучок пучок голоморфных функций.*

Последние 2 пучка, несмотря на похожесть определений обладают принципиально разными свойствами.

**Пример 2.6.** *Если $X$ — гладкое или комплексное многообразие и $\mathcal{F}(U)$ — тензорные поля $U$, то возникает пучок тензорных полей.*

**Упражнение 2.1.** *Докажите, что конструкции, описанные в примерах, действительно порождают пучки.*

**Упражнение 2.2.** *Придумайте предпучок, не являющийся пучком.*

Говорят, что *предпучок $\mathcal{A}$ является подпредпучком пучка $\mathcal{B}$* (и пишут $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$), если $\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{B}(U)$ для любого открытого множества $U$.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — предпучки на $X$. Их *морфизмом* $h : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ называется набор отображений $\{h_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) | U \in \mathfrak{U}\}$ такой, что $h_V r^U_V = r^U_V h_U$. Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются предпучками групп, колец, модулей и т.п, то морфизмами таких предпучков считаются лишь морфизмы $\{h_U\}$, порождающие гомоморфизмы соответствующих структур. Морфизм называется *изоморфизмом*, если все отображения взаимно однозначны. Ядра и образы отображений $h_U$ порождают подпредпучки $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathcal{F}$ и $\mathrm{Im}(h) \subset \mathcal{G}$.

**Упражнение 2.3.** *Пусть множества $\mathcal{F}(U)$ из примера 2.6 состоят из гладких или голоморфных (когда $X$ — комплексное многообразие) тензорных полей. Докажите, что тогда множества $\mathcal{F}(U)$ также образуют пучок, называемый пучком гладких (соответственно голоморфных) тензорных полей. Докажите, что этот пучок мономорфно отображается в пучок всех тензорных полей из примера 2.6.*

2.2. **Накрытия.** Сюръективный локальный гомеоморфизм топологических пространств $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ назовем *накрытием* (это определение отличается от стандартного, но удобно для изучения пучков).

*Сечением* накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$ на подмножестве $U \subset X$ называется отображение $s : U \to Y$ такое, что $\pi s = 1_U$ — тождественное отображение. Обозначим через $\mathcal{E}(U)$ множество всех сечений и через $\overline{\mathcal{F}(U)}$ множество непрерывных сечений над $U \subset X$.

**Упражнение 2.4.** *Докажите, что множества сечений* $\{\mathcal{E}(U)|U \in \mathfrak{U}\}$ *и* $\{\overline{\mathcal{F}(U)}|U \in \mathfrak{U}\}$ *вместе с естественными отображениями ограничений сечений на подмножества образуют пучки. Они называется пучком всех сечений и пучком непрерывных сечений накрытия соответственно.*

Наша ближайшая цель — сопоставить всякому предпучку $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), r^U_V\}$ на $X$ некоторое накрытие $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$.

Будем считать, что сечения $s \in \mathcal{F}(V)$ и $t \in \mathcal{F}(W)$ *эквивалентны в точке* $x$ (обозначается $s \in \mathcal{F}(V) \sim_x t \in \mathcal{F}(W)$), если существует открытое множество $x \in U \subset V \cap W$ такое что $r^V_U(s) = r^W_U(t)$. Обозначим через $\mathcal{F}_x = \bigcup_{U \ni x} \mathcal{F}(U)/\sim_x$ множество классов эквивалентности сечений в точке $x$.

Положим $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$. Сопоставим точке $x \in U \in \mathfrak{U}$ и сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ класс эквивалентности $s_x \in \mathcal{F}_x$ сечения $s$ в точке $x$. Обозначим через $s_U = \bigcup\limits_{x \in U} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$ объединение таких классов. Зададим на $\widetilde{\mathcal{F}}$ топологию, считая, что открытыми являются все множества вида $s_U$ и все объединения таких множеств.

**Упражнение 2.5.** *Доказать, что описанная конструкция действительно задает структуру топологического пространства на* $\widetilde{\mathcal{F}}$. *Доказать, что отображение* $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$, *где* $\pi(\mathcal{F}_x) = x$, *является накрытием.*

Упражнения 2.4 и 2.5 позволяют сопоставить любому предпучку $\mathcal{F}$ пучок всех сечений $\mathcal{E}$ и пучок $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$.

Сечению $s \in \mathcal{F}(U)$ (мы будем называть его абстрактным сечением) отвечает множество $s_U$, образующее сечение $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ мы будем называть его геометрическим сечением). Соответствие $s \mapsto \bar{s}$ порождает отображение $\tau_U : \mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$.

**Упражнение 2.6.** *Доказать, что семейство отображений* $\mathcal{F}(U) \to \overline{\mathcal{F}}(U)$ *образует морфизм предпучков* $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$. *Боле того, если* $\mathcal{F}$ *— предпучок групп, то* $\mathcal{E}$ *и* $\overline{\mathcal{F}}$ *— пучки групп и* $\tau_{\mathcal{F}}$ *— морфизм предпучков групп.*

**Упражнение 2.7.** *Доказать, что морфизм предпучков* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *естественно порождает непрерывное отображение* $\tilde{h} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \widetilde{\mathcal{B}}$, *которое, в свою очередь, естественно порождает морфизм пучков* $\bar{h} : \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ *такой, что* $\tau_{\mathcal{B}} h = \bar{h} \tau_{\mathcal{A}}$.

**Теорема 2.1.** *Если* $\mathcal{F}$ *— пучок, то* $\tau_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \overline{\mathcal{F}}$ *— изоморфизм пучков.*

*Доказательство.* а) *Инъективность.* Пусть $s', s" \in \mathcal{F}(U)$ — абстрактные сечения и $\tau_U(s') = \tau_U(s")$ — отвечающие им геометрические сечения. Рассмотрим произвольную точку $x \in U$. Тогда $s'_x = s"_x$ и, следовательно, существует содержащее точку $x$ открытое множество $V_x \subset U$ такое, что $r^U_{V_x}(s') = r^U_{V_x}(s")$. Таким образом, существует покрытие $U = \bigcup_{x \in X} V_x$ такое, что $r^U_{V_x}(s') = r^U_{V_x}(s")$. Согласно первой аксиоме пучка отсюда следует, что $s' = s"$.

b) *Сюръективность.* Пусть $\bar{s} \in \overline{\mathcal{F}}(U)$ — геометрическое сечение и $x \in U$. Отображение $\pi$ является гомеоморфизмом в некоторой окрестности $V_x \subset \bar{s}$ точки $\bar{s}_x \in \overline{\mathcal{F}}(U)$. Являясь открытым множеством, множество $V_x$ содержит "базисное"открытое подмножество вида $s^x_{U_x} \subset V_x \subset \bar{s}$, где $x \in U_x \subset \pi(V_x)$ и $s^x \in \mathcal{F}(U_x)$ — абстрактное сечение. Рассмотрим покрытие $X = \cup_{x\in X} U_x$.

На пересечении $U_x \cap U_y$ абстрактные сечения $s^x$ и $s^y$ порождают одно и то же геометрическое сечение $\bar{s}|_{U_x\cap U_y}$. Поэтому, согласно уже доказанному свойству инъективности, ограничения абстрактных сечений $s^x$ и $s^y$ на $U_x \cap U_y$ тоже совпадают. Ввиду аксиомы 2) пучка, отсюда следует существование сечения $s \in \mathcal{F}(U)$, порождающего сечение $\bar{s}$. $\square$

**Следствие 2.1.** *Каждый пучок изоморфен пучку непрерывных сечений некоторого накрытия.*

## 3. Когомологии с коэффициентами в пучке.

3.1. **Каноническая резольвента пучка.** *Далее мы считаем, что все рассматриваемые пучки являются пучками коммутативных групп.*

Говорят, что *последовательность гомоморфизмов групп $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$ точна в* $B$, если $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(h)$. Говорят, что *последовательность морфизмов $\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ пучков групп над $X$ точна в $\mathcal{B}$*, если для любого $x \in X$ последовательность групп $\mathcal{A}_x \xrightarrow{g} \mathcal{B}_x \xrightarrow{h} \mathcal{C}_x$ точна в $\mathcal{B}_x$. Говорят, что последовательность морфизмов групп пучков над $X$ $\mathcal{A}_1 \xrightarrow{g} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{h} \mathcal{A}_3 \to \dots \mathcal{A}_n \to \dots$ *точна*, если она точна в каждом члене

**Упражнение 3.1.** *Доказать, что, для подпучка $\mathcal{B}$ пучка $\mathcal{A}$, соответствие $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$ порождает предпучок. Всегда ли это пучок?*

Пучок $\mathcal{C}$, порожденный предпучком $U \mapsto \mathcal{B}(U)/\mathcal{A}(U)$, называется *фактор-пучком* $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

**Упражнение 3.2.** *Доказать, что естественное вложение подпучка в пучок вместе с естественной проекцией пучка на фактор-пучок порождают точную последовательность пучков* $0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{B} \to \mathcal{C} \to 0$

**Упражнение 3.3.** *Пусть $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на $\mathbb{C} - 0$, рассматриваемый как группа по сложению, $\mathcal{Z}$ — подпучок постоянных целочисленных функций и $\mathcal{O}^*$ — пучок не обращающихся в* 0 *голоморфных функций на* $\mathbb{C} - 0$, *рассматриваемый как группа по умножению. Тогда последовательность пучков* $0 \to \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, *где* $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$, *точна, а последовательность гомоморфизмов групп* $0 \to \mathcal{Z}(\mathbb{C} - 0) \xrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{C} - 0) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*(\mathbb{C} - 0) \to 0$ *не точна.*

Предыдущее упражнение дает пример точной последовательности последовательности пучков, порождающей не точную последовательность сечений. Неточности такого типа характеризуют пучок и являются, по существу, предметом *теории когомологий.*

Точная (во всех членах) последовательность пучков вида $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$ называется *резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

**Упражнение 3.4.** *Доказать, что последовательность групп* $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde\alpha} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_2} \ldots$, *индуцированная резольвентой* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$, *удовлетворяет условиям* $\tilde\alpha_0\tilde\alpha = \tilde\alpha_{n+1}\tilde\alpha_n = 0$ *и* $\mathrm{Ker}(\tilde\alpha_0) = \mathrm{Im}(\tilde\alpha)$

Рассмотрим пучок $\mathcal{F}$ и изоморфный ему пучок $\overline{\mathcal{F}}$ непрерывных сечений накрытия $\pi : Y \to X$. Рассмотрим пучок $\mathcal{E}(U) = \{s : U \to Y | \pi s = 1\}$ всех сечений накрытия $\pi$. Естественное вложение непрерывных сечений в произвольные порождает точную в $\mathcal{F}$ последовательность пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}(\mathcal{F})$.

Положим $\mathcal{F}^0 = \mathcal{E}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha))$ и обозначим через $\alpha_0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) = \mathcal{F}^1$ композицию естественных гомоморфизмов. Мы получили последовательность гомоморфизмов пучков $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1$. Продолжим процесс, то есть положим $\mathcal{F}^{n+1} = \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}))$, и обозначим через $\alpha_n : \mathcal{F}^n \to \mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}^n/\mathrm{Im}(\alpha_{n-1})) = \mathcal{F}^{n+1}$ композицию естественных гомоморфизмов.

**Упражнение 3.5.** *Доказать, что последовательность пучков* $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ *является резольвентой.*

Построенная резольвента $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ называется *канонической резольвентой пучка* $\mathcal{F}$.

3.2. **Когомологии.** Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над $X$, $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \ldots$ — его каноническая резольвента и $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde\alpha} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde\alpha_2} \ldots$ — индуцированная последовательность групп. Тогда группы $H^0(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_0) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X,\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\tilde\alpha_n)/\mathrm{Im}(\tilde\alpha_{n-1})$ называются *$n$-тыми группами когомологий пространства $X$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$*. Их прямая сумма $H^*(X,\mathcal{F})$ называется *(полной) группой когомологий пространства $X$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{F}$.*

Это понятие позволяет сопоставить группу произвольному пучку и использовать методы алгебры для изучения геометрических объектов. Простейшие группы такого типа (и мы увидим это далее) можно описать и чисто топологическими методами. Именно так их впервые построил А. Пуанкаре.

Следующая теорема показывает, что соответствие "пучок"$\mapsto$ "когомологии"является функториальным.

**Теорема 3.1.** *Морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ пучков над $X$ порождает гомоморфизмы групп когомологий $h_n : H^n(X,\mathcal{A}) \to H^n(X,\mathcal{B})$ такие, что:*

*1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ — гомоморфизм глобальных сечений;*

*2) если $h$ — тождественный морфизм, то $h_n$ — тождественный гомоморфизм для любого $n$;*

*3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ — последовательность морфизмов пучков, то $(lh)_n = l_n h_n$.*

*Доказательство.* Рассмотрим накрытия $f : Y \to X$ и $g : Z \to X$, пучки непрерывных сечений которых изоморфны пучкам $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Согласно упражнению 2.7, морфизм $h$ порождает локальный гомеоморфизм, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\bar{h}} & Z \\ \big\downarrow f & & \big\downarrow g \\ X & = & X \end{array}$$

Диаграмма порождает морфизм $h_0(s) = hs\ \mathcal{E}(\mathcal{A}) \to \mathcal{E}(\mathcal{B})$ пучков всех сечений накрытий. Этот морфизм замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 \\ & & \big\downarrow h & & \big\downarrow h_0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 \end{array}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — вложения непрерывных сечений в произвольные. Таким образом, $h_0(\mathrm{Im}\alpha) \subset \mathrm{Im}\beta$.

Рассмотрим накрытия $f^0 : Y^0 \to X$ и $g^0 : Z^0 \to X$, отвечающие пучкам $\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)$, и $\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$. Морфизм $h_0 : \mathcal{A}^0 \to \mathcal{B}^0$ порождает морфизм $h_0 : \mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha) \to \mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta)$, который порождает локальный гомеоморфизм $\tilde{h}_0$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y^0 & \xrightarrow{\tilde{h}_0} & Z^0 \\ \big\downarrow f^0 & & \big\downarrow g^0 \\ X & = & X \end{array}$$

Эта диаграмма порождает морфизм $h_1 : \mathcal{A}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{A}^0/\mathrm{Im}(\alpha)) \to \mathcal{B}^1 = \mathcal{E}(\mathcal{B}^0/\mathrm{Im}(\beta))$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 \\ & & \big\downarrow h & & \big\downarrow h_0 & & \big\downarrow h_1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 \end{array}$$

Продолжая процесс, получаем коммутативную диаграмму морфизмов пучков

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{A}^0 & \xrightarrow{\alpha_0} & \mathcal{A}^1 & \xrightarrow{\alpha_1} & \ldots \mathcal{A}^n & \xrightarrow{\alpha_n} \\ & & \big\downarrow h & & \big\downarrow h_0 & & \big\downarrow h_1 & & \big\downarrow h_n & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{B}^0 & \xrightarrow{\beta_0} & \mathcal{B}^1 & \xrightarrow{\beta_1} & \ldots \mathcal{B}^n & \xrightarrow{\beta_n} \end{array}.$$

Она порождает коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{A}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} & \mathcal{A}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} & \ldots \mathcal{A}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_n} \\ & & \big\downarrow \tilde{h} & & \big\downarrow \tilde{h}_0 & & \big\downarrow \tilde{h}_1 & & \big\downarrow \tilde{h}_n & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B}(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & \mathcal{B}^0(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_0} & \mathcal{B}^1(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_1} & \ldots \mathcal{B}^n(X) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_n} \end{array}.$$

Если $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $\tilde{\beta}_n(b) = \tilde{\beta}_n(\tilde{h}_n(a)) = \tilde{h}_{n+1}(\tilde{\alpha}_n(a)) = 0$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_n)) \subset \mathrm{Ker}(\tilde{\beta}_n)$. Кроме того, если $a \in \mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})$ и $b = \tilde{h}_n(a)$, то $a = \tilde{\alpha}_{n-1}(\hat{a})$ и $b = (\tilde{\beta}_{n-1}(\tilde{h}_{n-1}\hat{a})) \in \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$. Таким образом, $\tilde{h}_n(\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_{n-1})) \subset \mathrm{Im}(\tilde{\beta}_{n-1})$.

Следовательно, гомоморфизм $\tilde{h}_n$ порождает гомоморфизм $h_n : H^n(X, \mathcal{A}) \to H^n(X, \mathcal{B})$. Его свойства 1) и 2) непосредственно следуют из определений.

Для доказательства свойства 3) рассмотрим коммутативную диаграмму резольвент

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h^0"] & \mathcal{A}^1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "h^1"] & \ldots \mathcal{A}^n \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, "h^n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "l"] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "l^0"] & \mathcal{B}^1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "l^1"] & \ldots \mathcal{B}^n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "l^n"] & {}, \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{C}^0 \arrow[r, "\gamma_0"] & \mathcal{C}^1 \arrow[r, "\gamma_1"] & \ldots \mathcal{C}^n \arrow[r, "\gamma_n"] & {}
\end{tikzcd}$$

порождающую коммутативную диаграмму групп

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[d, "\tilde{h}_1"] & \ldots \mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "\tilde{l}"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_0"] \arrow[d, "\tilde{l}_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_1"] \arrow[d, "\tilde{l}_1"] & \ldots \mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_n"] \arrow[d, "\tilde{l}_n"] & {}. \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] & \mathcal{C}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0"] & \mathcal{C}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1"] & \ldots \mathcal{C}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n"] & {}
\end{tikzcd}$$

Из наших определений непосредственно следует, что морфизм пучков $l^n h^n$ порождает произведение гомоморфизмов $\tilde{l}_n \tilde{h}_n$. Таким образом, $(\widetilde{lh})_n = \tilde{l}_n \tilde{h}_n$ откуда $(lh)_n = l_n h_n$ □

## 4. Точные последовательности.

4.1. **Мягкие пучки.** Далее мы считаем, что все рассматриваемые топологические пространства $X$ нормальны и парокомпактнны.Топологическое пространство $X$ называется *нормальным*, если выполнена следующая аксиома отделимости. Для любых не пересекающихся замкнутых подмножеств $S, T \subset X$ существуют содержащие их непересекающиеся открытые множества $X \supset U \supset S$, $X \supset V \supset T$.

*Парокомпактом* называется пространство $X$, в любое открытое покрытие которого можно вписать консервативное замкнутое покрытие. Объясним эти термины. Говорят, что покрытие $X = \bigcup_{\gamma \in G} S_\gamma$ *вписано в покрытие* $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, если для любого $U_\alpha$ существует $S_\gamma$ такое, что $W_\gamma \subset U_\alpha$. Покрытие замкнутыми множествами $X = \bigcup_{\gamma \in G} S_\gamma$ называется *консервативным*, если для любого подмножества индексов $\Gamma \subset G$ множество $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} S_\gamma$ — замкнуто.

Все метризуемые пространства и, в частности, топологические многообразия являются нормальными паракомпактоми. Топологическая структура пространства $X$ порождает структуру топологического пространства на любом замкнутом подмножестве $S \subset X$. Открытые подмножества $S$ — это пересечения открытых подмножеств $X$ с $S$. Всякое замкнутое подмножество паракомпакта — паракомпакт.

Отождествим произвольный пучок $\mathcal{F}$ над над топологическим пространством $X$ с пучком непрерывных сечений порожденного им накрытия $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \to X$

(теорема 2.1). Определим для замкнутого подмножества $S \subset X$ множество $\mathcal{F}(S)$ как множество непрерывных сечений $\pi$ над $S$. Эта конструкция порождает отображения ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$.

Пучок $\mathcal{F}$ над топологическим пространством $X$ называется *мягким*, если отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(S)$ сюръективно, для любого замкнутого подмножества $S \subset X$, то есть любое сечение над $S$ продолжается до сечения над $X$.

**Упражнение 4.1.** *Доказать, что*

1. *Пучок $\mathcal{E}(\mathcal{F})$ произвольных сечений накрытия — мягкий.*
2. *Пучок гладких функций на $\mathbb{R}^n$ — мягкий.*
3. *Пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}$ — не мягкий.*
4. *Постоянный пучок (т.е. пучок локально постоянных функций) — не мягкий.*

Как и раньше, говоря о пучках мы будем иметь в виду пучки над фиксированным пространством $X$.

**Теорема 4.1.** *Пусть $\mathcal{A}$ — мягкий пучок и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{A}(X) \xrightarrow{g} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{h} \mathcal{C}(X) \to 0$ тоже точна.*

*Доказательство.* Точность в членах $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{B}(X)$ сразу следует из точности последовательности пучков в членах $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и аксиом 1), 2) пучка. Докажем точность в члене $\mathcal{C}(X)$. Пусть $c \in \mathcal{C}(X)$. Тогда для каждого $x \in X$ существует окрестность $x \in U$ и сечение $b \in \mathcal{B}(U)$ такие, что $h(b) = c|_U$. Покроем пространство $X$ парами $(U_j, b_j)$ такого типа. Рассмотрим консервативное покрытие $\{S_i\}$, вписанное в покрытие $\{U_j\}$. Оно порождает множество пар $(S_i, s_i)$, где $s_i \in \mathcal{B}(S_i)$ и $h(s_i) = c|_{S_i}$. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{S}$ всех пар $(S, s)$, где $S$ — объединение множеств из $\{S_i\}$ и $h(s) = c|_S$. Введем на $\mathfrak{S}$ частичный порядок, считая, что $(S, s) \preceq (S', s')$, если $S \subset S'$ и $s'|_S = s$. Любая упорядоченная цепочка таких пар имеет верхнюю границу — объединение всех элементов цепочки. Следовательно, согласно лемме Цорна, существует максимальная пара $(\bar{S}, \bar{s}) \in \mathfrak{S}$. Осталось доказать, что $\bar{S} = X$.

Пусть это не так. Тогда существует пара $(S_0, s_0) \in \mathfrak{S}$ такая, что $S_0 \nsubseteq \bar{S}$, $S_0 \cap \bar{S} \neq \emptyset$ и $h(\bar{s} - s_0) = 0$ на $S_0 \bigcap \bar{S}$. Ограничим пучки на пространство $S_0 \bigcap \bar{S}$. Из уже доказанной точности в члене $\mathcal{B}(S_0 \bigcap \bar{S})$ следует, что существует сечение $a \in \mathcal{A}(S_0 \bigcap \bar{S})$ такое, что $g(a) = \bar{s} - s_0$. Используя мягкость пучка $\mathcal{A}$, продолжим сечение $a$ до $a_0 \in \mathcal{A}(S_0)$. Рассмотрим сечение $\tilde{s} \in \mathcal{B}(S_0 \bigcup \bar{S})$, такое, что $\tilde{s}|_{\bar{S}} = \bar{s}$ и $\tilde{s}|_{S_0} = s_0 + g(a_0)$. Тогда $(S_0 \bigcup \bar{S}, \tilde{s}) \in \mathfrak{S}$, что противоречит максимальности $(\bar{S}, \bar{s})$. □

**Теорема 4.2.** *Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — мягкие пучки и $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \to 0$ — точная последовательность пучков. Тогда пучок $\mathcal{C}$ — мягкий.*

*Доказательство.* Пусть $S \subset X$ — произвольное замкнутое множество и $c \in \mathcal{C}(S)$. Тогда, согласно теореме 4.1, существует сечение $b \in \mathcal{B}(S)$ такое, что $h(b) = c$. Используя мягкость пучка $\mathcal{B}$, продолжим сечение $b$ до сечения $\tilde{b} \in \mathcal{B}(X)$ и положим $\tilde{c} = h(\tilde{b})$. Тогда $\tilde{c}|_S = c$. □

**Теорема 4.3.** *Пусть $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots$ — точная последовательность, состоящая из мягких пучков на $X$. Тогда последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \dots$ тоже точна.*

*Доказательство.* Положим $K^0 = \mathcal{F}^0$ и $K^n = \mathrm{Ker}(\alpha_n)$ при $n > 0$. Рассмотрим точные последовательности пучков $0 \to K^n \to \mathcal{F}^n \to K^{n+1} \to 0$. Используя индукцию и теорему 4.2, находим, что пучки $K^n$ мягкие. Следовательно, согласно теореме 4.1, последовательность групп $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$ точна. Последовательность групп $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_2} \dots$ является склейкой последовательностей $0 \to K^n(X) \to \mathcal{F}^n(X) \to K^{n+1}(X) \to 0$. $\square$

**Следствие 4.1.** *Если $\mathcal{F}$ — мягкий пучок, то $H^n(X, \mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$.*

*Доказательство.* Каноническая резольвента пучка $\mathcal{F}$ состоит из мягких пучков. $\square$

### 4.2. **Длинная точная последовательность.**

**Теорема 4.4.** *Точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ порождает точную последовательность групп когомологий $0 \to H^0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} H^0(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} H^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} H^1(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} H^1(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} H^1(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} H^2(X,\mathcal{A})\dots$, называемую длинной точной последовательностью.*

*Доказательство.* Согласно теореме 3.1, канонические резольвенты пучков порождают коммутативную диаграмму групп

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{h}"] & \mathcal{A}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_0"] \arrow[d, "\tilde{h}_0"] & \mathcal{A}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_1"] \arrow[d, "\tilde{h}_1"] & \dots\mathcal{A}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "\tilde{h}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B}(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}"] \arrow[d, "\tilde{l}"] & \mathcal{B}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_0"] \arrow[d, "\tilde{l}_0"] & \mathcal{B}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_1"] \arrow[d, "\tilde{l}_1"] & \dots\mathcal{B}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\beta}_n"] \arrow[d, "\tilde{l}_n"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathcal{C}(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}"] \arrow[d] & \mathcal{C}^0(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_0"] \arrow[d] & \mathcal{C}^1(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1"] \arrow[d] & \dots\mathcal{C}^n(X) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_n"] \arrow[d] & {} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

и отображения $h_n$, $l_n$. Построим отображение $\delta_n$.

Ввиду теоремы 4.1 все столбцы, начиная со второго, точны. Рассмотрим $c \in \mathrm{Ker}(\tilde{\gamma}_n)$. Ввиду точности столбца существует элемент $b \in B^n(X)$ такой, что $\tilde{l}_n(b) = c$. Положим $b' = \tilde{\beta}_n b$. Тогда $\tilde{l}_{n+1} b' = \tilde{l}_{n+1}(\tilde{\beta}_n b) = \tilde{\gamma}_n(\tilde{l}_n b) = \tilde{\gamma}_n(c) = 0$. Ввиду точности столбца существует элемент $a \in A^{n+1}(X)$ такой, что $\tilde{h}_{n+1}(a) = b'$. Более того, $\tilde{h}_{n+2}(\tilde{\alpha}_{n+1} a) = \tilde{\beta}_{n+1}(\tilde{h}_{n+1} a) = \tilde{\beta}_{n+1} b' = \tilde{\beta}_{n+1}\tilde{\beta}_n b = 0$. Ввиду точности столбца отсюда следует, что $\tilde{\alpha}_{n+1} a = 0$, то есть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{\alpha}_{n+1})$.

Пусть теперь $\bar{b} \in B^n(X)$ другой элемент со свойством $\tilde{l}_n(\bar{b}) = c$. Тогда $\tilde{l}_n(b - \bar{b}) = 0$ и ввиду точности столбца, $(b - \bar{b}) = \tilde{h}(\tilde{a})$, где $\tilde{a} \in A^n(X)$. Поэтому, в виду коммутативности, применяя предыдущую конструкцию к элементу $\bar{b}$ мы получим элемент $a + \tilde{\alpha}_n(\tilde{a})$. Таким образом, элемент $a$ определен с точностью до $\mathrm{Im}(\tilde{\alpha}_n)$. Следовательно, соответствие $\mapsto a$ порождает отображение $\tilde{\delta}_n : \mathrm{Ker}(\tilde{\gamma}_n) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Пусть теперь $c \in \mathrm{Im}(\tilde{\gamma}_{n-1})$, то есть $c = \tilde{\gamma}_{n-1}c''$ для некоторого $c'' \in C^{n-1}(X)$. Ввиду точности столбца, существует элемент $b'' \in B^{n-1}(X)$ такой, что $\tilde{l}_{n-1}(b'') = c''$. Положим $b = \tilde{\beta}_{n-1}b''$. Ввиду коммутативности диаграммы $\tilde{l}_n b = c$. Используя этот $b$ в описанной выше конструкции, находим, что $\tilde{\delta}_n c = 0$ и, следовательно, $\tilde{\delta}_n$ порождает гомоморфизм $\delta_n : H^n(X, \mathcal{C}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{A})$.

Докажем точность последовательности когомологий. Если $\tilde{h}_n a \in \mathrm{Ker}(\beta_n)$, то $\tilde{h}_{n+1}\alpha_n a = \tilde{\beta}_n \tilde{h}_n a = 0$ и, следовательно, $a \in \mathrm{Ker}(\alpha_n)$. Таким образом, точность последовательности в члене $H^n(X, \mathcal{B})$ следует из точности столбцов диаграммы сечений пучков. Аналогично доказывается точность последовательности в члене $H^n(X, \mathcal{C})$. Докажем точность в члене $H^n(X, \mathcal{A})$. Пусть $a \in \mathrm{Ker}(\tilde{h}_{n+1})$. Тогда $\tilde{h}_{n+1}a \in \mathrm{Im}(\beta_n)$, то есть $\tilde{h}_{n+1}a = \beta_n b$ для некоторого $b \in B^n(X)$. По определению это означает, что $a = \delta_n c$, где $c = \tilde{l}_n(b)$. □

Участвующие в длинной точной последовательности операторы $\delta_i$ называются *связывающими*

**Упражнение 4.2.** *Доказать, что морфизм (т.е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*порождает морфизм (т.е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}) & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}) & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B})... \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{B}') & \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{C}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{A}') & \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{B}')... \end{array}$$

## 5. Аксиоматическая теория когомологий.

5.1. **Ацикличные резольвенты.** Резольвента $D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} ...\}$ пучка $\mathcal{F}$ называется *ацикличной*, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0, m \geq 0$.

Свяжем с резольвентой $D_{\mathcal{F}}$ последовательность сечений $0 \to \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathcal{D}^0(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} \mathcal{D}^1(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \mathcal{D}^2(X) \xrightarrow{\tilde{\delta}_2} ....$ Положим $H^0(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(X)$, $H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$ для $n > 0$.

**Теорема 5.1.** *Для произвольной резольвенты $D_{\mathcal{F}} = \{0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\delta} \mathcal{D}^0 \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{D}^1 \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{D}^2 \xrightarrow{\delta_2} ...\}$ существуют естественные гомоморфизмы $\gamma^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^n(X, \mathcal{F})$. Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если $D_{\mathcal{F}}$ — ацикличная резольвента.*

*Доказательство.* Положим $K^0 = \mathcal{F}$ и $K^n = \mathrm{Ker}(\delta_n)$ при $n > 0$. Тогда последовательность $0 \to K^{n-1} \to \mathcal{D}^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}} K^n \to 0$ точна. Рассмотрим ее длинную точную последовательность $0 \to H^0(X, K^{n-1}) \to H^0(X, \mathcal{D}^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n-1}} H^0(X, K^n) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_1^n} H^1(X, K^{n-1}) \to H^1(X, \mathcal{D}^{n-1})....$

Согласно нашим определениям, $H^n(X, D_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}) = K^n(X)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1}) = H^0(X, K^n)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{n-1})$. Таким образом, гомоморфизм $\tilde{\gamma}_1^n$ порождает мономорфизм $\gamma_1^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^1(X, K^{n-1})$, являющийся изоморфизмом при $H^1(X, \mathcal{D}^{n-1}) = 0$.

Рассмотрим теперь длинную точную последовательность, отвечающую точной последовательности пучков $0 \to K^{n-r} \to \mathcal{D}^{n-r} \xrightarrow{\delta_{n-r}} K^{n-r+1} \to 0$. Она имеет участок $\ldots \to H^{r-1}(X, \mathcal{D}^{n-r}) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{n-r}} H^{r-1}(X, K^{n-r+1}) \xrightarrow{\tilde{\gamma}_r^n} H^r(X, K^{n-r}) \to H^r(X, \mathcal{D}^{n-r})\ldots$. Он дает гомоморфизм $\gamma_r^n : H^{r-1}(X, K^{n-r+1}) \to H^r(X, K^{n-r})$, являющийся изоморфизмом при $H^{r-1}(X, \mathcal{D}^{n-r}) = H^r(X, \mathcal{D}^{n-r}) = 0$.

Таким образом произведение $\gamma^n = \gamma_n^n \gamma_{n-1}^n \gamma_{n-2}^n \ldots \gamma_1^n : H^n(X, D_{\mathcal{F}}) \to H^1(X, K^{n-1}) \to H^2(X, K^{n-2}) \ \ldots \ \to H^n(X, K^0) = H^n(X, \mathcal{F})$ порождает гомоморфизм, который является изоморфизмом, если $H^n(X, D^m) = 0$ для всех $n > 0, m \geq 0$. $\square$

Ниже мы увидим, что многие важные пучки имеют естественные ацикличные резольвенты. В этих случаях теорема 5.1 дает эффективную возможность вычислять когомологии с коэффициентами в пучках.

**Упражнение 5.1.** *Морфизм резольвент*

$$\begin{array}{lccccccccc}
\mathfrak{A}_{\mathcal{A}} : & 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}^1 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f_0} & & \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \\
\mathfrak{B}_{\mathcal{B}} : & 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}^0 & \longrightarrow & \mathcal{B}^1 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

*порождает гомоморфизмы групп $\tilde{f}_n : H^n(X, \mathfrak{A}_{\mathcal{A}}) \to H^n(X, \mathfrak{B}_{\mathcal{B}})$. Эти гомоморфизмы являются изоморфизмами, если $f$ — изоморфизм пучков и обе резольвенты ацикличны.*

5.2. **Аксиоматический подход.** Доказательство теоремы 5.1 использует лишь доказанные нами общие свойства групп когомологий и не использует конструкцию, с помощью которой мы их определяли. Это позволяет описать когомологии как аксиоматическую теорию.

**Упражнение 5.2.** *Доказать следующее утверждение.*

*Пусть $\mathcal{F} \mapsto \tilde{H}^*(X, \mathcal{F})$ — произвольное соответствие, сопоставляющее пучку абелевых групп $\mathcal{F}$ над топологическим пространством $X$ семейство абелевых групп $\tilde{H}^*(X, \mathcal{F}) = \{\tilde{H}^n(X, \mathcal{F}) | n \geq 0\}$ таким образом, что $\tilde{H}^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ и выполняются 4 аксиомы:*

*I.Нормировка (сравните со следствием 4.1): Если $\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{F}$ произвольных сечений накрытия, то $\tilde{H}^n(X, \mathcal{F}) = 0$ при $n > 0$ .*

*II. Функториальность соответствия (сравните с теоремой 3.1): Морфизм $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B}$ пучков над $X$ порождает гомоморфизмы групп когомологий $h_n : \tilde{H}^n(X, \mathcal{A}) \to \tilde{H}^n(X, \mathcal{B})$ такие, что:*

*1) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \to \mathcal{B}(X)$ — гомоморфизм глобальных сечений;*

*2) если $h$ — тождественный морфизм, то $h_n$ — тождественный гомоморфизм для любого $n$;*

*3) если $\mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C}$ — последовательность морфизмов пучков, то $(lh)_n = l_n h_n$.*

*III. Длинная точная последовательность (сравните с теоремой 4.4): Точная последовательность пучков $0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{h} \mathcal{B} \xrightarrow{l} \mathcal{C} \to 0$ порождает точную последовательность групп когомологий*

*$0 \to \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_0} \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_0} \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}) \xrightarrow{h_1} \tilde{H}^1(X,\mathcal{B}) \xrightarrow{l_1} \tilde{H}^1(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1} \tilde{H}^2(X,\mathcal{A})\ldots$, называемую длинной точной последовательностью.*

*IV. Функториальность длинной точной последовательности (сравните с упражнением 4.2): Морфизм (т.е. коммутативная диаграмма) точных последовательностей пучков*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*порождает морфизм (т.е. коммутативную диаграмму) длинных точных последовательностей*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{B})\ldots \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{A}') \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{B}') \arrow[r] & \tilde{H}^0(X,\mathcal{C}') \arrow[r] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{A}') \arrow[r] & \tilde{H}^1(X,\mathcal{B}')\ldots
\end{tikzcd}.$$

*Тогда существуют функториальные относительно морфизмов пучков изоморфизмы между группами $\tilde{H}^n(X,\mathcal{F})$ и $H^n(X,\mathcal{F})$.*

Простота аксиоматики наводит на мысль о существовании других конструкций, приводящих к когомологиям. Важные примеры таких конструкций: когомологии Чеха и когомологии де Рама (для постоянных пучков на гладких многообразиях) приводятся ниже.

## 6. Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{R}$ и теорема де Рама.

6.1. **Пучки модулей.** Кроме пучков групп мы будем рассматривать пучки колец и пучки модулей над пучками колец. Для того чтобы наделить пучок $\mathcal{M}$ структурой пучка модулей над пучком колец $\mathcal{R}$, надо наделить структурой модуля над $\mathcal{R}(U)$ множества сечений $\mathcal{M}(U)$ и потребовать, чтобы эти структуры были согласованы с ограничениями сечений пучков.

**Упражнение 6.1.** *Дать полное определение пучка модулей над пучком колец.*

**Пример 6.1.** *1. Пучки произвольных функций на $X$ со значениями в кольце $\mathbb{K}$ (например, в кольце вещественных $\mathbb{R}$ или комплексных $\mathbb{C}$ чисел) является пучком колец.*

*2. Подпучок $\mathcal{C}$ непрерывных функций и подпучок локально постоянных функций со значениями в кольце $\mathbb{K}$. Последний пучок является пучком колец и будет обозначаться той же буквой $\mathbb{K}$.*

*3. Пучок $\mathcal{E}$ гладких функций на гладком многообразии $X$ является пучком колец. Пучки гладких тензорных полей фиксированного типа являются пучками модулей над $\mathcal{E}$. Важным для нас примером будет пучок $\mathcal{E}^p$ вещественных дифференциальных форм степени $p$.*

**Теорема 6.1.** *Пучок модулей над мягким пучком колец $\mathcal{R}$ с единицей является мягким.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{M}$—пучок модулей над $\mathcal{R}$. Рассмотрим произвольное сечение $s \in \mathcal{M}(S)$ над замкнутым множеством $S \subset X$. Оно является ограничением некоторого сечения $\tilde{s} \in \mathcal{M}(U)$ над некоторой окрестностью $U \supset S$. В виду мягкости, пучок $\mathcal{R}$ имеет сечение $r \in \mathcal{R}(X)$, принимающее значение 1 на $S$ и значение 0 на $X \setminus U$. Следовательно определено сечение $r\tilde{s} \in \mathcal{M}(X)$, совпадающее с $s$ на $S$. $\square$

**Следствие 6.1.** *Пучки модулей над кольцами непрерывных и гладких функций мягкие.*

*Доказательство.* Согласно теореме 6.1, нам достаточно доказать, что пучки непрерывных и гладких функций на гладком многообразии мягкие. Это следует из классической теоремы математического анализа: для непересекающихся замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и компакта $B \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(A) = 1$ и $\varphi(B) = 0$. $\square$

6.2. **Сингулярные когомологии.** Через $H^n(X, \mathbb{R})$ мы обозначаем когомологии пространства $X$ со значениями в постоянном пучке колец. В топологии похожее обозначение $H^n_{sin}(X, \mathbb{R})$ имеют сингулярные когомологии. Напомним их определение.

Обозначим через $\Delta^p$ $p$-мерный симплекс с упорядоченными вершинами. *Сингулярной цепью степени p* на $X$ называется конечная формальная линейная комбинация с вещественными коэффициентам непрерывных отображений $\sum_i r_i \{(f_i : \Delta^p \to U)\}$. Они образуют векторное пространство $L_p(U)$ над $\mathbb{R}$.

*Сингулярной коцепью степени p* на $X$ называется вещественный линейный функционал на $L_p(U)$. Стандартная в топологии операция, сопоставляющая симплексу $\Delta^p = \{1, 2, ..., p\}$ линейную комбинацию симплексов $\sum_i (-1)^i \{1, 2, ..., \hat{i}, ...p\}$ (где $\hat{}$ означает пропуск вершины), задает оператор $\tilde{\delta}^{p-1} : L^{p-1}(U) \to L^p(U)$.

**Упражнение 6.2.** *Доказать, что* $\tilde{\delta}^{p+1}\tilde{\delta}^p = 0$.

Соответствия $U \mapsto L^p(U)$, вместе с естественными отображениями ограничений, порождают предпучок $L^p$ на $X$. Продолжим оператор $\tilde{\delta}$ на пучок $\mathcal{L}^p$ порожденный предпучком $L^p$. Фактор-группа $H^p_{sin}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_p)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{p-1})$ называется $p$-той группой *сингулярных когомологий.* Не трудно доказать, что $H^p_{sin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \delta_{p,0}$.

**Теорема 6.2.** $H^p_{sin}(X, \mathbb{R}) = H^p(X, \mathbb{R})$.

*Доказательство.* Пучок $\mathcal{L}^0$ имеет естественную структуру кольца, изоморфного кольцу $\mathcal{E}$ произвольных вещественных функций на $X$. Пучки $\mathcal{L}^p$ являются модулями над кольцом $\mathcal{L}^0$, относительно умножения $\smile$, действующим как умножение на число после изоморфизма с $\mathcal{E}$. Согласно теореме 6.1 отсюда следует все пучки $\mathcal{L}^p$ мягкие. Последовательность пучков $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{\delta^2} ...$ точна в виду $H^p_{sin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \delta_{p,0}$, то есть образует резольвенту мягких пучков. Согласно следствию 4.1 и теореме 5.1 отсюда следует, что $H^p(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_p)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{p-1}) = H^p_{sin}(X, \mathbb{R})$. $\square$

6.3. **Когомологии де Рама.** Покажем, что когомологии с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{R}$ над гладким многообразием $X$ совпадают не только с сингулярными когомологиями но и с когомологиями де Рама. Напомним их определение.

Рассмотрим векторное пространство $E^p = \mathcal{E}^p(X)$ вещественных дифференциальных форм на $X$. Обозначим через $\tilde{d}^p : E^p \to E^{p+1}$ оператор дифференцирования дифференциальных форм. Тогда $\tilde{d}^{p+1}\tilde{d}^p = 0$. Фактор-группа $H^p_{Dr}(X, R) = \mathrm{Ker}(\tilde{d}^p)/\mathrm{Im}(\tilde{d}_{n-1})$ называется *p-той группой когомологиями де Рама.*

**Теорема 6.3.** $H^p_{Dr}(X, \mathbb{R}) = H^p(X, \mathbb{R})$.

*Доказательство.* Операторы дифференцирования порождают последовательность пучков дифференциальных форм $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{d} \mathcal{E}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{E}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{E}^2 \xrightarrow{d^2} ....$ Согласно лемме Пуанкаре, условие $d(f) = 0$ локально эквивалентно условию $f = d(g)$. Таким образом, эта последовательность пучков точна и является резольвентой. Она мягкая согласно следствию 6.1. Согласно следствию 4.1 и теореме 5.1 отсюда следует, что $H^p(X, \mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\tilde{\delta}_p)/\mathrm{Im}(\tilde{\delta}_{p-1}) = H^p_{Dr}(X, \mathbb{R})$. □

Таким образом, мы доказали

**Теорема 6.4.** *(де Рам) Когомологии де Рама изоморфны сингулярным когомологиям.*

**Упражнение 6.3.** *Используя упражнение 5.1, доказать, что изоморфизм, о котором идет речь в теореме, порождается интегрированием дифференциальных форм по сингулярным цепям.*

## 7. Векторные расслоения.

7.1. **Определения и примеры.** Гладкое отображение гладких многообразий $\pi : E \to X$ называется *вещественным локально тривиальным векторным расслоением ранга* $r$, если

1) *слой* $E_p = \pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in X$ наделен структурой вещественного векторного пространства размерности $r$;

2) у каждой точки $p \in X$ существует окрестность $U \subset X$ и гладкое отображение $h : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$, называемое *локальной тривиализацией*, такие, что отображение $h|_{E_x} : E_x \to x \times \mathbb{C}^r$ является изоморфизмом комплексных векторных пространств для любого $x \in U$.

Многообразия $E$ и $X$ называются соответственно *пространством* и *базой* расслоения. Далее мы будем для краткость опускать слова "вещественное локально тривиальное".

Пара тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $h_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{R}^r$ порождает отображение $h_\alpha h_\beta^{-1} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r \to (U_\alpha \bigcap U_\beta) \times \mathbb{R}^r$, эквивалентное гладкому отображению $g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R})$, называемому *функцией перехода.*

**Лемма 7.1.** *Пусть* $\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha \in \Upsilon\}$ *— покрытие топологического пространства* $X$ *открытыми множествами. Тогда семейство гладких отображений* $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta} : (U_\alpha \bigcap U_\beta) \to GL(r, \mathbb{R}) | \alpha, \beta \in \Upsilon\}$*, где* $g_{\alpha\alpha} = 1$*, является семейством функцией перехода некоторого векторного расслоения* $\pi : E \to X$*, если и только если* $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ *на* $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ *для любых* $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$.

*Доказательство.* Равенство $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ для семейства функций перехода векторного расслоения очевидно. Докажем обратное утверждение. Рассмотрим семейство гладких отображений $\mathcal{G}$ такое, что $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$ для любых $\alpha, \beta, \gamma \in \Upsilon$. Рассмотрим $\tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} E_\alpha$, где $E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Точки

$(p,v) \in E_\alpha = U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ и $(p,w) \in E_\beta = U_\beta \times \mathbb{R}^r$ будем считать эквивалентными, если $v = g_{\alpha\beta} w$. Факторизация множества $\tilde{E}$ по этой эквивалентности порождает нужное нам расслоение с локальными тривиализациями $h_\alpha(p,v) = (p,v)$. □

Таким образом, мы можем задавать векторные расслоения над $X$, указывая покрытие многообразия $X$ и семейство функций перехода, удовлетворяющее лемме 7.1.

**Пример 7.1.** *1) Тривиальное расслоение $\pi : X \times \mathbb{R}^r \to X$.*

*2) Универсальное расслоение над проективным пространством. Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ — это множество всех одномерных подпространств векторного пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x^0, ..., x^n)\}$. Универсальным расслоением называется отображение $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющее вектору $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ порожденное им подпространство $[v] = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$.*

*Множество $\mathbb{R}P^n$ покрывается множествами $U_i = \{[(x^0, ..., x^n)] | x^i \neq 0\}$. Эти множества, вместе с функциями $f_i([(x^0, ..., x^n)]) = (\frac{x^0}{x^i}, ..., \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, ..., \frac{x^n}{x^i}) \in \mathbb{R}^n$ образуют гладкий атлас $(U_i, f_i)$, на $\mathbb{R}P^n$. Соответствие $(x^0, ..., x^n) \mapsto ([v], x^i)$ порождает порождает локальную тривиализацию $h_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}$. Функции перехода между тривиализациями $h_i$ и $h_j$ равны $g_{ij} = \frac{x^i}{x^j}$.*

*3) Касательное расслоение $\pi : TX \to X$ над произвольным гладким многообразием $X$. Рассмотрим атлас локальных карт $\{(f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^r) | \alpha \in \Upsilon\}$ многообразия $X$. Гомеоморфизм $f_\alpha$ позволяет задать вектора $\{\frac{\partial}{\partial x^i} | i = 1, \ldots, r\}$ в каждой точке $x \in U_\alpha$. Порожденные ими векторные пространства образуют множество $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$. Их объединение, вместе с отождествлением касательных векторов, образует локальную тривиализацию расслоения, называемого касательным.*

**Упражнение 7.1.** *Докажите, что функция перехода между тривилизациями $f_\alpha$ и $f_\beta$ совпадает с матрицей Якоби отображения $f_\beta f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to f_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$.*

*Морфизмом* векторного расслоения $\pi : E \to X$ в векторное расслоение $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ называется пара гладких отображений $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ и $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ таких, что $\tilde{\pi}\varphi_E = \varphi_X \pi$ и ограничение $\varphi_E|_p$ отображения $\varphi_E$ на каждый слой $E|_p = \pi^{-1}(p)$ является гомоморфизмом. Как обычно, обратимый в классе морфизмов морфизм расслоений называется *изоморфизмом расслоений*. При $X = \tilde{X}$ и тождественном отображении $\varphi_X$ изоморфизм называется *эквивалентностью расслоений*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi_E} & \tilde{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ X & \xrightarrow{\varphi_X} & \tilde{X} \end{array}$$

**Упражнение 7.2.** *Доказать, что семейства переходных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство гладких отображений $l_\alpha : U_\alpha \to GL(r, \mathbb{R})$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1}$. Доказать, что касательное расслоение, зависящее в нашем определении от атласа локальных карт, переходит в эквивалентное при замене атласа.*

**Лемма 7.2.** *Для любого векторного расслоения $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$ и любого гладкого отображения $\varphi_X : X \to \tilde{X}$ существует векторное расслоение $\pi : E \to X$ и отображения $\varphi_E : E \to \tilde{E}$ такие, что $(\varphi_X, \varphi_E)$ — морфизм расслоений.*

*Доказательство.* Определим расслоение $\pi : E \to X$ и отображение $\varphi_E : E \to \tilde{E}$, считая, что $\pi^{-1}(p) = \tilde{\pi}^{-1}(\varphi_X(p))$. Определим гладкую структуру на $E$, считая, что $\varphi_E$ — гладкое отображение. □

Векторное расслоение $\pi : E \to X$, удовлетворяющее требованиям леммы 7.2, называется *обратным образом расслоения* $\tilde{\pi} : \tilde{E} \to \tilde{X}$.

**Упражнение 7.3.** *Доказать, что обратный образ расслоения определен однозначно, с точностью до эквивалентности.*

На векторные расслоения над $X$ распространяются все операции между векторными пространствами. Прямая сумма $\pi_1 \oplus \pi_2 : E_1 \bigoplus E_2 \to X$ расслоений $\pi_1 : E_1 \to X$ и $\pi_2 : E_2 \to X$ определяется, например, условием $(\pi_1 \oplus \pi_2)^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$. Расслоение $\pi^* : E^* \to X$ называется *сопряженным* к расслоению $\pi : E \to X$, если слои $E_p$ и $E_p^*$ сопряжены, то есть $E^* = Hom(E, \mathbb{R}_X)$, где $\mathbb{R}_X$ — тривиальное расслоение ранга 1. Расслоение, сопряженное к касательному расслоению, называется *кокасательным.*

**Упражнение 7.4.** *Дать точные определения и найти переходные функции расслоений $E_1 \bigoplus E_2 \to X$, $E_1 \otimes E_2 \to X$, $Hom(E_1, E_2) \to X$, $S^n E \to X$ (симметричная тензорная степень), $\Lambda^n E \to X$ (антисимметричная тензорная степень), $E^* \to X$ и для кокасательного расслоения.*

*Сечением векторного расслоения* $\pi : E \to X$ называется гладкое отображение $s : X \to E$ такое что $\pi s$ — тождественное отображение. Множество сечений над $U \subset X$ будет обозначаться $E(U)$. Нетрудно видеть, что соответствие $U \mapsto E(U)$ и очевидные функции ограничения порождают пучок $\mathcal{E}_E$, называемый *пучком сечений векторного расслоения* $\pi : E \to X$. Пучки, получающиеся таким способом из векторных расслоений, и изоморфные им пучки называются *локально свободными.*

**Пример 7.2.** *Пучок сечений антисимметричной тензорной степени $\Lambda^p T^* X$ кокасательного расслоения $\pi : T^* X \to X$ изоморфен пучку $\mathcal{E}^p$ дифференциальных $p$-форм.*

*Локально свободные пучки являются пучками модулей над мягким пучком гладких функций. Следовательно, согласно следствию 6.1 все они мягкие.*

**Упражнение 7.5.** *Как связаны морфизмы локально свободных пучков и морфизмы отвечающих им векторных расслоений?*

7.2. **Универсальные расслоения.** *Грассмановым многообразием $\mathbb{K}G_{r,n}$ над полем* $\mathbb{K}$ называется множество всех $r$-мерных подпространств векторного пространства $\mathbb{K}^n$. Мы будем рассматривать лишь вещественные ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) и комплексные ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) грассмановы многообразия.

*Универсальным расслоением* называется расслоение $\pi_{r,n} : E \to \mathbb{K}G_{r,n}$ ранга $r$, слой которого $E_p$ над точкой $p \in \mathbb{K}G_{r,n}$ совпадает с подпространством в $\mathbb{K}^n$, представляющим $p$.

Структура гладкого (соответственно, комплексного) многообразия определяется на $\mathbb{K}G_{r,n}$ и $E$ следующим образом. Рассмотрим множество $M_{r,n}$ всех матриц $r \times n$ ранга $r$ с элементами из $\mathbb{K}$. Строчки матрицы $m \in M_{r,n}$ будем интерпретировать как векторы пространства $\mathbb{K}^n$. Они образуют базис подпространства $[m] \in \mathbb{K}^n$. Группа $GL(r, \mathbb{K})$ действует на $M_{r,n}$ умножением слева, переводя строчки матрицы $M_{r,n}$ в их линейные комбинации и тем самым меняя базис пространства $[m]$. Это позволяет отождествить подпространство $[m] \in \mathbb{K}G_{r,n}$ с орбитой матрицы $m$ под действием группы $GL(r, \mathbb{K})$. Положим $\pi_{r,n}(m) = [m]$ и $E_{[m]} = \pi_{r,n}^{-1}([m])$.

Матрице $m \in M_{r,n}$ и набору чисел $\alpha = \{1 \leq \alpha_1 < \alpha_2, ..., < \alpha_r \leq n\}$ отвечает матрица $m_\alpha \in GL(r, \mathbb{K})$, составленная из столбцов $\alpha$. Обозначим через $E_\alpha$ множество всех матриц $m \in M_{r,n}$ таких, что матрица $m_\alpha$ невырождена. Их орбиты $[m]$ образуют открытое множество $[E_\alpha] \subset \mathbb{K}G_{r,n}$. Совокупность всех таких множеств является покрытием многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$. Сопоставим матрице $m \in E_\alpha$ матрицу $m_{\bar{\alpha}} \in M_{r,n-r}$, получающуюся из матрицы $m_\alpha^{-1}m$ выкидыванием столбцов $\alpha$. Матрицу $m_{\bar{\alpha}}$ можно рассматривать как вектор $f_\alpha([m])$ пространства $\mathbb{K}^{r\times(n-r)}$. Пары $([E_\alpha], f_\alpha)$ образуют гладкий атлас многообразия $\mathbb{K}G_{r,n}$.

Для $m \in E_\alpha$ обозначим через $l_\alpha : E_{[m]} \to \mathbb{K}^r$ линейный оператор, переводящий строки матрицы $m_\alpha$ в стандартный базис пространства $\mathbb{K}^r$. Тогда соответствие $m \mapsto ([m], l_\alpha(m))$ порождает тривиализацию $\pi_{r,n}^{-1}(E_\alpha) \to E_\alpha \times \mathbb{K}^r$.

**Упражнение 7.6.** *Найти функции перехода между этими тривиализациями.*

Термин "универсальное расслоение"объясняется следующим фактом

**Теорема 7.1.** *Всякое векторное расслоение $\pi : E \to X$ ранга $r$ над компактным гладким многообразием $X$ изоморфно обратному образу универсального расслоения $\pi_{r,N} : M_{r,N} \to \mathbb{R}G_{r,N}$ для некоторого гладкого отображения $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$.*

*Доказательство.* Обозначим через $l_1, ..., l_r$ базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^r)^*$ такой, что $l_i(x^1, ..., x^r) = x^i$. Покроем $X$ конечной системой тривиализаций $h_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ расслоения $\pi : E \to X$. Функционалы $l_1, ..., l_r$ порождают сечения $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ на $U_\alpha$ ограничения сопряженного расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Впишем в открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ замкнутое покрытие $\{V_\beta\}$. Рассмотрим ограничения $l_1^\beta, ..., l_r^\beta$ сечений $l_1^\alpha, ..., l_r^\alpha$ на элементы покрытия $\{V_\beta\}$. Используя мягкость пучка, продолжим сечения $l_1^\beta, ..., l_r^\beta$ до глобальных сечений $\tilde{l}_1^\beta, ..., \tilde{l}_r^\beta$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$. Проделав эту процедуру для всех элементов покрытия $\{V_\beta\}$ находим набор глобальных сечений $(\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_N) = \bigcup_\alpha (\tilde{l}_1^\alpha, ..., \tilde{l}_r^\alpha)$ расслоения $\pi^* : E^* \to X$, имеющий ранг $r$ в любой точке $p \in X$.

Сопоставим теперь базису $e_1, ..., e_r$ в слое $E_p = \pi^{-1}(p)$ матрицу $W_p = \{w_{ij}\}$, где $w_{ij} = \tilde{l}_j(e_i)$. Обозначим через $[W_p] \subset \mathbb{R}^N$ векторное пространство, порожденное строками этой матрицы. Замена базиса $e_1, ..., e_r$ эквивалентна умножению матрицы $W_p$ слева на невырожденную матрицу. Поэтому подпространство $[W_p] \in \mathbb{R}G_{r,N}$ не зависит от выбора базиса. Таким образом, мы построили гладкое отображение $\Phi : X \to \mathbb{R}G_{r,N}$, где $\Phi(p) = [W_p]$. Отображение, сопоставляющее базису $e_1, ..., e_r$ строки матрицы $W_p$, порождает изоморфизм между расслоением $\pi : E \to X$ и ограничением универсального расслоения $\pi_{r,N} : M_{r,N} \to \mathbb{R}G_{r,N}$ на подмножество $\Phi(X)$. $\square$

**Замечание 7.1.** *Можно доказать, что всякое векторное расслоение с не обязательно компактной базой может быть покрыто конечной системой тривиализаций. Таким образом, теорема 7.1 верна для произвольного гладкого, не обязательно компактного многообразия.*

## 8. Комплексные многообразия и когомологии Дольбо.

8.1. **Дифференциальные формы.** Все естественные не постоянные пучки на гладком многообразии являются модулями над мягким кольцом гладких функций и, по-этому когомологии со значениями в этих пучках нулевые. Естественные пучки на комплексном многообразии не мягкие и порожденные ими когомологии являются важнейшими характеристиками многообразий. В этом разделе мы опишем когомологии со значениями в голоморфных пучках через мягкие резольвенты гладких сечений вещественных расслоений над комплексном многообразием.

Конструкцию нужных нам вещественных расслоений мы начнем с конструкций линейной алгебры. Комплексное векторное пространство $V$ порождает вещественное векторное пространство $V_{\mathbb{R}}$, где $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V$. Умножение на $i$ в пространстве $V$ порождает линейный оператор $J : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$. Сопоставим базису $(e_1, ..., e_n)$ пространства $V$ базис $(e_1, f_1, ..., e_n, f_n)$ пространства $V_{\mathbb{R}}$, где $f_i = ie$. Тогда $J(e_k) = f_k$, $J(f_k) = -e_k$.

Рассмотрим теперь комплексное векторное пространство $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \bigotimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{\alpha^k e_k + \beta^k f_k | \alpha^k, \beta^k \in \mathbb{C}\}$. Продолжим $J$ до $\mathbb{C}$-линейного оператора $J_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$. Тогда, как и раньше, $J_{\mathbb{C}}^2 = -1$. Комплексное пространство $V_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму комплексных подпространств $V^{1,0} \bigoplus V^{0,1}$,где $V^{1,0} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} v = iv\}$ и $V^{0,1} = \{v \in V_{\mathbb{C}} | J_{\mathbb{C}} v = -iv\}$. Проекция $I : V_{\mathbb{C}} \to V$, где $I(e_k) = e_k$, $I(f_k) = 0$, порождает $\mathbb{C}$-изоморфизм $I : V^{1,0} \to V$.

Пространство внешних форм $\bigwedge^r V_{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму $\bigwedge^r V_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q} V$, где $\bigwedge^{p,q} V \subset \bigwedge^{p+q} V_{\mathbb{C}}$ подпространство, порожденное внешними формами вида $u \wedge v$, такими, что $u \in \bigwedge^p V^{1,0}$, $v \in \bigwedge^q V^{0,1}$. Обозначим через $Q : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$-линейный оператор $Q(\alpha^k e_k + \beta^k f_k) = \bar{\alpha}^k e_k - \bar{\beta}^k f_k$.

**Упражнение 8.1.** *Доказать, что оператор $Q$ не зависит от выбора базиса $(e_1, ..., e_n)$ и $Q(V^{1,0}) = V^{0,1}$.*

Рассмотрим теперь комплексное многообразие $X$. Кокасательное пространство $T_z^*$ в точке $z \in X$ является комплексным векторным пространством. Их совокупность образует расслоение $\bigwedge^r T_{\mathbb{C}}^* \to X$. Применяя предыдущую конструкцию к каждому слою расслоения, находим его представление в виде суммы расслоений $\bigwedge^r (T_z^*)_{\mathbb{C}} = \sum_{p+q=r} \bigwedge^{p,q}(T_z^*)$. Сечения $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U) = \sum_{p+q=r} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ этих расслоений называются *комплекснозначными дифференциальными формами полной степени $r$*. Они образуют мягкие пучки модулей над кольцом гладких функций и связаны дифференциалами $d : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{r+1}(U)$.

Рассмотрим естественные проекции $\pi_{p,q} : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^r(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ и операторы

$$\partial = \pi_{p+1,q} d : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(U),$$
$$\bar{\partial} = \pi_{p,q+1} d : \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+q+1}(U) \to \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(U).$$

**Упражнение 8.2.** *Доказать, что $Q\partial Q = \bar{\partial}$.*

Опишем теперь действие операторов $\partial, \bar{\partial}$ в локальной карте $z : U \to \mathbb{C}^n$. Комплексные локальные координаты $z = (z^1, ..., z^n)$ порождают вещественные локальные координаты $z^k = x^k + iy^k$. Дифференциалы координатных функций образуют ковекторные поля $(dz^1, ..., dz^n)$, $(dx^1, ..., dx^n, dy^1, ..., dy^n)$. Обозначим через $(\frac{\partial}{\partial z^1}, ..., \frac{\partial}{\partial z^n})$, $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^n})$ двойственные им векторные поля. Тогда $dz^k = dx^k + idy^k$ и $\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k})$. Положим $\overline{dz^k} = dx^k - idy^k$ и $\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k})$.

**Упражнение 8.3.** *Векторы* $\{\frac{\partial}{\partial z^k}|k=1,...,n\}$ *и* $\{\frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}|k=1,...,n\}$ *образуют базисы пространств* $(T_z)^{1,0}$ *и* $(T_z)^{0,1}$ *соответственно. Ковекторы* $\{dz^k|k=1,...,n\}$ *и* $\{d\overline{z^k}|k=1,...,n\}$ *образуют базисы пространств* $(T_z^*)^{1,0}$ *и* $(T_z^*)^{0,1}$ *соответственно.*

**Лемма 8.1.** $\partial = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$, $\bar\partial = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}$, $d=\partial+\bar\partial$, $\partial^2=\bar\partial^2=\partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0$ .

*Доказательство.* Пусть $\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$, $\sum_1 = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\sum_2 = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\xi$. Тогда $d\xi = \sum_1+\sum_2$, причем $\sum_1 \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q}(U)$ и $\sum_2 = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(U)$. Таким образом, $\partial\xi = \pi_{p+1,q}d\xi = \sum_1 = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}\xi$ и $\bar\partial\xi = \pi_{p,q+1}d\xi = \sum_2 = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}\xi$. Следовательно, $\partial = dz^k \wedge \frac{\partial}{\partial z^k}$ и $\bar\partial = d\overline{z^k} \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z^k}}$ и $d=\partial+\bar\partial$. Ввиду $d^2=0$ отсюда следует, что $0=(\partial+\bar\partial)^2\xi = \partial^2\xi+\bar\partial^2\xi+(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)\xi$, причем $\partial^2\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+2,q}(U)$, $\bar\partial^2\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+2}(U)$, $(\partial\bar\partial+\bar\partial\partial)\xi \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p+1,q+1}(U)$. Таким образом, $\partial^2=\bar\partial^2=\partial\bar\partial+\bar\partial\partial=0$ . □

Следующая лемма аналогична лемме Пуанкаре и доказывается по той же схеме

**Лемма 8.2.** *(Дольбо). Пусть* $\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(U)$ *и* $z\in U$. *Тогда в некоторой окрестности* $V$ *точки* $z$: *1) условия* $\partial\omega=0$ *и* $\omega\in\partial\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p-1,q}(V)$ *эквивалентны; 2) условия* $\bar\partial\omega=0$ *и* $\omega\in\bar\partial\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(V)$ *эквивалентны.*

8.2. **Когомологии Дольбо.** Голоморфное отображение комплексных многообразий $\pi : E \to X$ называется *голоморфным векторным расслоением ранга* $r$, если

1) слой $E_z=\pi^{-1}(z)$ каждой точки $z\in X$ наделен структурой комплексного векторного пространства размерности $r$;

2) у каждой точки $z\in X$ существует окрестность $z\in U\in X$ и голоморфное отображение $h:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{C}^r$, называемое *локальной тривиализацией*, такие, что отображение $h|_{E_x}:E_x\to x\times\mathbb{C}^r$ является изоморфизмом комплексных векторных пространств для любого $x\in U$.

Кокасательное расслоение $T^*X$ к комплексному многообразию $X$ имеет естественную структуру комплексного расслоения. Внешняя степень $\Omega^p = \bigwedge^p\Omega$ пучка его голоморфных сечений $\Omega$ называется пучком *голоморфных дифференциальных форм степени* $p$. Другими словами, $\Omega^p(U)=\{\omega\in\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0}(U)|\bar\partial\omega=0\} = \{\omega=\sum a_{i_1...i_p}dz^{i_1}\wedge...\wedge dz^{i_p}|\frac{\partial a_{i_1...i_p}}{\partial\bar z^{i_j}}=0\}$.

**Упражнение 8.4.** *Доказать, что последовательность пучков* $0\to\mathbb{C}\to\Omega^0\xrightarrow{\partial}\Omega^1\xrightarrow{\partial}\Omega^2\xrightarrow{\partial}...\xrightarrow{\partial}\Omega^n\xrightarrow{\partial}0$ *является точной.*

**Теорема 8.1.** *(Дольбо).* $H^q(X,\Omega^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X)\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q+1}(X))/\mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X)\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X))$

*Доказательство.* Последовательность пучков $0\to\Omega^p\xrightarrow{in}\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,0}\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,1}\xrightarrow{\bar\partial}...\xrightarrow{\bar\partial}\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,n}\xrightarrow{\bar\partial}0$ является резольвентой ввиду леммы 8.1 и леммы Дольбо. Она ациклична ввиду мягкости пучков $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q}$ (следствия 6.1 и 4.1). Поэтому утверждение теоремы Дольбо следует из теоремы 5.1. □

Для компактного многообразия размерности когомологий $h^{p,q}=\dim H^q(X,\Omega^p)$ конечны и называются *числами Ходжа.*

Пусть теперь $\pi:E\to X$ — голоморфное расслоение ранга $r$ над комплексным многообразием $X$ и $\mathcal{E}_E$ — пучок его голоморфных сечений. Тогда голоморфные сечения $\Omega_E^p$ расслоения $(\bigwedge^p T^*X)\bigotimes_{\mathbb{C}}E$ называются *голоморфными* *дифференциальными формами степени $p$ с коэффициентами в $E$*. Сечения пучка $\mathcal{E}_E^{p,q} = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q} \bigotimes_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_E$ называются *дифференциальными $(p,q)$-формами с коэффициентами в $E$*. Рассмотрим оператор $\bar{\partial}_E : \mathcal{E}_E^{p,q} \to \mathcal{E}_E^{p,q+1}$ такой, что $\bar{\partial}_E(\omega \otimes e) = \bar{\partial}\omega \otimes e$.

**Упражнение 8.5.** *Доказать, что оператор $\bar{\partial}_E$ корректно определен для любого голоморфного расслоения $E$, в то время как оператор $\partial_E(\omega \otimes e) = \partial\omega \otimes e$ — лишь для одномерного тривиального расслоения.*

Повторяя рассуждения теоремы Дольбо, находим

**Теорема 8.2.** $H^q(X, \Omega_E^p) = \mathrm{Ker}(\mathcal{E}_E^{p,q}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{E}_E^{p,q+1}(X))/\mathrm{Im}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}_E} \mathcal{E}_E^{p,q}(X))$.

## 9. Когомологии Чеха.

9.1. **Когомологии покрытия.** Как мы уже доказали, когомологии со значениями в пучке — это единственный функтор из категории пучков в категорию абелевых групп, удовлетворяющий простой системе аксиом. Такой функтор можно строить разными способами, не обязательно с помощью резольвент. Когомологии де Рама и сингулярные когомологии дают, как мы видели, примеры таких конструкций для постоянного пучка $\mathbb{R}$, а когомологии Дальбо — для пучков голоморфных дифференциальных форм. В этом параграфе мы опишем не связанную с резольвентой конструкцию когомологий со значениями в произвольном пучке. Эта конструкция оказывается удобной для многих приложений теории.

Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства $X$ открытыми множествами. Любой упорядоченный набор с непустым пересечением из $q+1$ элементов этого покрытия $\sigma = (U_0, U_1, ..., U_q)$ назовем *$q$-симплексом* покрытия $\mathcal{U}$. Пересечение $|\sigma| = \bigcap_{i=0}^q U_i$ назовем *носителем* симплекса $\sigma$. $q$-симплекс $\sigma$ порождает $(q-1)$-симплексы $\sigma_i = (U_0, U_1, ...U_{i-1}, U_{i+1}, ..., U_q)$.

Рассмотрим пучок абелевых групп $\mathcal{G}$ над топологическим пространством $X$. Отображение, сопоставляющее каждому $q$-симплексу $\sigma$ сечение $f(\sigma) \in \mathcal{G}(|\sigma|)$ над его носителем, называем *$q$-цепью покрытия $\mathcal{U}$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$*. Множество всех $q$-цепей $C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ образует абелеву группу. Используя отображения ограничения $r_V^U : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$, определим *кограничный оператор* $\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G})$, считая, что $(\delta f)(\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i r_{|\sigma|}^{|\sigma_i|} f(\sigma_i)$ для любого $f \in C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$.

**Упражнение 9.1.** *Доказать, что $\delta^2 = 0$.*

Положим $Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}(\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$, $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0$ и $B^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ для $q > 0$ . Фактор-группа $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})/B^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ называется *$q$-тыми когомологиями Чеха для покрытия $\mathcal{U}$*.

**Лемма 9.1.** *Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ — покрытие топологического пространства $X$ открытыми множествами. Тогда $\check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(X)$ и, если $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений накрытия, то $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = 0$ при $q > 0$.*

*Доказательство.* Согласно аксиоме 2) пучка, из условия $f \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ следует существование сечения $s \in \mathcal{G}(X)$ такого, что $s|_U = f(U)$ для любого $U \in \mathcal{U}$.

Пусть теперь $\mathcal{G}$ — пучок произвольных сечений некоторого накрытия. Рассмотрим произвольную $q$-цепь $f \in Z^q(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ и построим $q-1$-цепь $g$ такую, что $\delta(g) = f$. Эта цепь определяется сечениями $g(|\sigma^{q-1}|)$ над носителями всех $q-1$-симплексов $\sigma^{q-1}$. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ рассмотрим сечение $g(|\sigma^{q-1}| \cap U) = (-1)^q f(\sigma^{q-1}, U)$ над $|\sigma^{q-1}| \cap U$. Условие $\delta(f) = 0$ гарантирует совпадение этих сечений на пересечении различных $U \in \mathcal{U}$. Положим теперь $g(|\sigma^{q-1}|) = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} g(|\sigma^{q-1}| \cap U)$. Тогда $\delta(g) = f$. □

9.2. **Теорема Лере.**

**Теорема 9.1.** *(Лере) Пусть $\mathcal{G}$ — пучок абелевых групп над $X$ и покрытие $\mathcal{U}$ пространства $X$ таково, что $H^q(|\sigma|, \mathcal{G}) = 0$ при $q > 0$ для любого симплекса $\sigma$ этого покрытия. Тогда $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) = H^q(X, \mathcal{G})$.*

*Доказательство.* Рассмотрим каноническую резольвенту $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\gamma} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{\gamma} \ldots$ пучка $\mathcal{G}$. Она порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}(X) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{G}^0(X) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{G}^1(X) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots \mathcal{G}^n(X) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}^0) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}^1) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots C^0(\mathcal{U}, \mathcal{G}^n) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}^0) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}^1) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots C^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}^n) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}^0) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}^1) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & \ldots C^2(\mathcal{U}, \mathcal{G}^n) \arrow[r, "\tilde\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & {} \\
 & {} & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Условие $H^q(|\sigma|, \mathcal{G}) = 0$ означает, что последовательность $0 \to \mathcal{G}(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \mathcal{G}^0(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \mathcal{G}^1(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \mathcal{G}^2(|\sigma|) \xrightarrow{\tilde\gamma} \ldots$ точна для любого симплекса $\sigma$ покрытия $\mathcal{U}$. Отсюда следует точность всех строк диаграммы кроме, быть может, первой. Из леммы 9.1 следует следует точность всех столбцов диаграммы кроме, быть может, первого.

Сопоставим теперь элементу $f^q \in \operatorname{Ker}(\delta : C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ некоторый элемент из $\operatorname{Ker}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^q(X) \to \mathcal{G}^{q+1}(X))$. Для этого рассмотрим $\tilde f^q = \tilde\gamma f^q$. Тогда $\delta \tilde f^q = \tilde\gamma \delta f^q = 0$. Используя точность столбца, находим элемент $f^{q-1} \in C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}^0)$ такой, что $\delta f^{q-1} = \tilde f^q$. Положим $\tilde f^{q-1} = \tilde\gamma f^{q-1}$. Тогда $\delta \tilde f^{q-1} = \tilde\gamma^2 f^q = 0$. Используя точность столбца, находим элемент $f^{q-2} \in C^{q-2}(\mathcal{U}, \mathcal{G}^1)$ такой, что $\delta f^{q-2} = \tilde f^{q-1}$. Продолжая процесс, находим элемент $f \in \mathcal{G}^q(X)$ такой, что $\delta \tilde\gamma f = 0$. Ввиду мономорфности $\delta$ отсюда следует, что $\tilde\gamma f = 0$. Нетрудно проследить, что произвол в выборе элементов $f^i$ не меняет когомологический класс $f + \operatorname{Im}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ элемента $f$. Более того, наша конструкция переводит группу $\operatorname{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U}, \mathcal{G}))$ в группу $\operatorname{Im}(\tilde\gamma : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$. Таким образом, мы построили гомоморфизм $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to H^q(X,\mathcal{G})$. Эпиморфность отображения доказывается полностью аналогичной "инверсной"конструкцией, позволяющей сопоставить элементу из $\mathcal{G}^q(X)$ элемент из $C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$. Группе $\mathrm{Im}(\tilde{\gamma} : \mathcal{G}^{q-1}(X) \to \mathcal{G}^q(X))$ отвечает при этом группа $\mathrm{Im}(\delta : C^{q-1}(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \to C^q(\mathcal{U},\mathcal{G}))$ и, следовательно, эпиморфизм является мономорфизмом. □

Покрытия $\mathcal{U}$ со свойством $H^q(|\sigma|,\mathcal{G}) = 0$ для любого симплекса $\sigma$ называются *покрытиями Лере для пучка* $\mathcal{G}$. Такие покрытия имеют большинство важных для приложения пучков. В этом случае теорема Лере дает эффективный метод вычисления когомологий.

Покрытие $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}$ назовем *измельчением* покрытия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, если для любого $V_\alpha \in \mathcal{V}$ существует $U_\beta \in \mathcal{U}$, содержащее $V_\alpha$. Рассмотрим соответствие $F$, сопоставляющее каждому симплексу $\varsigma = (V_0, V_1, ..., V_q)$ симплекс $\sigma(\varsigma) = (U_0, U_1, ..., U_q)$, где $V_i \subset U_i$ для всех $i$. Сопоставим коцепи $f \in C^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ ее измельчение, то есть коцепь $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}(f) \in C^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$ такую, что $\tilde{\varphi}^q_{\mathcal{F}}(f)(\varsigma) = r^{|\sigma(\varsigma)|}_{|\varsigma|} f(\sigma(\varsigma))$.

**Упражнение 9.2.** *Доказать, что отображение* $\tilde{\varphi}_{\mathcal{F}}$ *порождает гомоморфизм* $\varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} : \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$*, не зависящий от соответствия* $F$*.*

Рассмотрим теперь объединение всех групп $\check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$, отвечающих всем открытым покрытиям $\mathcal{U}$ множества $X$. Введем между элементами этих групп отношение эквивалентности, считая, что $u \in \check{H}^q(\mathcal{U},\mathcal{G})$ эквивалентен $v \in \check{H}^q(\mathcal{V},\mathcal{G})$, если $\varphi^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}(u) = \varphi^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(v)$ для некоторого измельчения $\mathcal{W}$ покрытий $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. (Конструкция такого типа называется *индуктивным пределом* по множеству покрытий). Классы эквивалентности образуют абелеву группу $\check{H}^q(X,\mathcal{G})$, называемую *$q$-той группой когомологий Чеха пространства $X$ с коэффициентами в пучке $\mathcal{G}$.*

**Упражнение 9.3.** *Доказать, что для топологического многообразия $X$ когомологии Чеха $\check{H}^q(X,\mathcal{G})$ изоморфны когомологиям $H^q(X,\mathcal{G})$. Докажите это двумя способами:*

*1.Модифицируя приведенное выше доказательство теоремы Лере.*

*2. Доказав, что функтор $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}$ удовлетворяют аксиомам аксиома теории когомологий (упражнение 5.2).*

Для пучков, допускающих покрытие Лере конструкция из доказательства теоремы Лере дает явное описание изоморфизма когомологий Чеха и когомологий, определенных с помощью резольвент .

## 10. Линейные расслоения и первый класс Черна.

Изучим более детально голоморфные расслоения $\eta : E \to X$ ранга 1 на комплексном многобразии $X$. (Расслоения ранга 1 называются также *линейными.*) Рассмотрим пучок $\mathcal{O}^*$ необращающихся в 0 голоморфных функций на $X$, рассматриваемый как группа по умножению.

**Теорема 10.1.** *Между классами эквивалентности голоморфных линейных расслоений над $X$ и элементами группы $H^1(X,\mathcal{O}^*)$ существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

*Доказательство.* Рассмотрим покрытие $X = \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ стягиваемыми открытыми множествами. Немного модифицируя лемму Пуанкаре, нетрудно доказать, что $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ является покрытием Лере для пучков $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^*$. Очевидным образом модифицируя лемму 7.1, находим, что семейство голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}\}$ является системой функций перехода для некоторого линейного расслоения $\eta : E \to X$, если и только если $g_{\alpha,\beta} g_{\beta,\gamma} g_{\gamma,\alpha} = 1$, то есть $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Аналогично, согласно упражнению 7.2, семейства голоморфных функций $\{g_{\alpha,\beta}\}$ и $\{\tilde{g}_{\alpha,\beta}\}$ задают эквивалентные расслоения, если и только если существует семейство голоморфных функций $l_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ такое, что $\tilde{g}_{\alpha,\beta} = l_\alpha g_{\alpha,\beta} l_\beta^{-1} = l_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta}$, где $l_{\alpha,\beta} = l_\alpha l_\beta^{-1}$. С другой стороны, $\{l_\alpha\} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ и $\{l_{\alpha\beta}\} = \delta(\{l_\alpha\}) \in B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. Согласно теореме Лере 10.1, это означает, что классы эквивалентности голоморфных линейных расслоений над $X$ взаимно однозначно соответствуют множеству $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)/B^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) = \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$. $\square$

**Упражнение 10.1.** *Из теоремы 10.1 следует, что голоморфные линейные расслоения над $X$ образуют коммутативную группу. Опишите ее в терминах самих расслоений.*

Рассмотрим точную последовательность пучков $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$, где $\mathcal{O}$ — пучок голоморфных функций на $X$, $\mathbb{Z}$ — подпучок локально постоянных функций и $\exp(f)(z) = e^{2\pi i f(z)}$. Она порождает (теоремы 4.4, 10.1), точную последовательность гомологий $0 \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{H}^0(X, \mathcal{O}) \to \check{H}^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_0} \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}) \to \check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{b_1} \check{H}^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$..., со связывающими гомоморфизмами $b_i$. (Эти гомоморфизмы называются также *операторами Бокштейна.*)

Для $g = \{g_{\alpha,\beta}\}$ положим $\tau(g)_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2\pi i}\ln(g_{\alpha,\beta})$, где $\ln g$ — произвольная ветвь логарифма. Тогда $\tau(g) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O})$

**Лемма 10.1.** *Пусть* $g = \{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$. *Тогда* $b_1(\{g_{\alpha,\beta}\}) = \delta(\tau(g)) = \{\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta})\}$.

*Доказательство.* Действительно, $\delta(\{\tau(g)_{\alpha,\beta}\}) = \{\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta})\}$. Используя описание связывающего гомоморфизма (теорема 4.4), находим, что $b_1(\{g_{\alpha,\beta}\}) \ni (\delta\tau(g))_{\alpha,\beta,\gamma} = \{\frac{1}{2\pi i}(\ln g_{\beta,\gamma} - \ln g_{\alpha,\gamma} + \ln g_{\alpha,\beta})\}$.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^0(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^1(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & (\delta\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z}^3(X) \arrow[d, "i"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & \mathcal{O}^0(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & (\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & (\delta\tau) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\exp"] & \mathcal{O}^3(X) \arrow[d, "\exp"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^*(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*0}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & (g) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*2}(X) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathcal{O}^{*2}(X) \arrow[d] \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

$\square$

Вложение пучков $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ индуцирует гомоморфизм когомологий $j : H^*(X,\mathbb{Z}) \to H^*(X,\mathbb{R})$, убивающий кручение (элементы конечного порядка).

*Первым классом Черна (S.S.Chern)* расслоения $\eta$ называется гомологический класс $c_1(\eta) = -j(b_1(g(\eta))) \in H^2(X,\mathbb{R})$, где $g(\eta) \in H^1(X,\mathcal{O}^*)$ построенный выше отвечающий расслоению $\eta$ класс когомологий. В русскоязычной литературе его называют также классом Чженя, транскрибируя китайский вариант фамилии.

Согласно теореме де Рама группа когомологий $H^2(X,\mathbb{R})$, представляется классами эквивалентности дифференциальных 2-форм. Найдем дифференциальную форму, представляющую класса Черна $c_1(\eta)$. Для этого рассмотрим произвольную эрмитову метрику на расслоении $\eta$. Метрика на слое цивилизации определяет длиной базисного вектора. Эрмитова метрика на расслоении задается, таким образом, гладкими комплекснозначными функциями $\{h_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}\}$ с функциями перехода $h_\beta = g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}h_\alpha$, где $\{g_{\alpha,\beta}\}$ — функции перехода расслоения.

**Теорема 10.2.** *Дифференциал* $\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha$ *представляет* $c_1(\eta)$.

*Доказательство.* Положим $\mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln h_\alpha$. Тогда $(\delta\mu)_{\alpha,\beta} = \mu_\beta - \mu_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln \frac{h_\beta}{h_\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\partial \ln(g_{\alpha,\beta}\bar{g}_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi i}(\partial \ln g_{\alpha,\beta} + \partial \ln \bar{g}_{\alpha,\beta}) = \frac{1}{2\pi i} d \ln g_{\alpha,\beta} = d\tau(g)_{\alpha,\beta}$. Согласно алгоритму, приведенному в теореме 9.1, отсюда следует, что коциклу Чеха $\delta\tau(g) = b_1(g(\eta))$ отвечает дифференциальная форма $d\mu_\alpha = d\frac{1}{2\pi i}\partial \ln h_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\partial \ln h_\alpha = -\frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha$

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{R}(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^0(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^1(X) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{O}^3(X) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}^0) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\tau) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (d\tau = \delta\mu) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
0 \arrow[r] & C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & (\delta\tau) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{O}^1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{O}^2) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"] & C^2(\mathcal{U},\mathcal{O}^3) \arrow[d, "\delta"] \\
 & {} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}
$$

$\square$

**Упражнение 10.2.** *Докажите, что первый класс Черна тривиального расслоения равен 0.*

**Пример 10.1.** *Найдем класс Черна касательного расслоения к сфере Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\infty$. *Используем сферическую эрмитову метрику, имеющую вид* $h(z) = \frac{1}{(1+|z|^2)^2}$ *на комплексной плоскости* $\{z\} = \mathbb{C}$ *и такой же вид в координатной карте* $w = \frac{1}{z}$ *на* $\overline{\mathbb{C}} \setminus 0$. *Тогда* $c_1 = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\ln h_\alpha = \frac{i}{\pi(1+|z|^2)^2} dz \wedge d\bar{z}$. *В частности,* *интеграл* $\int\limits_{\overline{\mathbb{C}}} c_1 = 2$ *совпадает с эйлеровой характеристикой сферы Римана. Можно доказать, что интеграл первого класса Черна касательного расслоения к римановой поверхности всегда равен ее эйлеровой характеристике.*

**Упражнение 10.3.** *Докажите, что любое голоморфное векторное поле на сфере обращается в 0 в некоторой точке.*

Другое описание голоморфных линейных расслоений дается с помощью дивизоров. Рассмотрим пучок $\mathcal{M}$ мероморфных функций на комплексном многообразии $X$, рассмотренный как группа по умножению. Пучок $\mathcal{D} = \mathcal{M}/\mathcal{O}^*$ называется *пучком дивизоров*, а его сечения $D$ *дивизорами* на $X$.

Слой $\mathcal{M}_x$ состоит из классов эквивалентности мероморфных функций $\frac{f_1}{f_2}$. Если в некоторой окрестности $f_1, f_2 \neq 0$, то — это класс эквивалентности голоморфной функции. Поэтому в достаточно маленькой окрестности точки $x$ дивизор $D$ равен 0 вне множества нулей некоторой голоморфной функции $f_1 f_2$.

Таким образом, дивизор выделяет некоторое (возможно особое) комплексное подмногообразие в $X(D) \subset X$ коразмерности 2, компоненты которого имеют целочисленные кратности (степени нулей/полюсов функций $f_1/f_2$).

Из точности последовательности пучков $0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M} \to \mathcal{D} \to 0$ следует, что для дивизора $D \in H^0(X, \mathcal{D})$ существует покрытие $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ и мероморфные функции $f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$, нули и полюса, которых расположены на $X(D)$, имеют ту же кратность, что и $D$, причем $g_{\alpha,\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \mathcal{O}^*(U_\alpha \bigcap U_\beta)$. В частности, $g_{\alpha,\beta} g_{\beta,\gamma} g_{\gamma,\alpha} = 1$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$. Таким образом, дивизор $D$ порождает линейное расслоение с коциклом $\{g_{\alpha,\beta}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$.

Это соответствие можно описать с помощью индуцированной точной последовательностью гомологий $H^0(X, \mathcal{M}) \to H^0(X, \mathcal{D}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Из нее видно, что дивизоры описывают эквивалентные расслоения, если и только, если они получаются друг из друга умножением на глобальную мероморфную функцию. Такие дивизоры называются *линейно эквивалентными*.

Обратное соответствие строится по мероморфному сечению $s$ расслоения $\eta$. Ему отвечает дивизор $D(s)$, состоящий из взятых с кратностями компонент множества нулей и полюсов сечения.

Можно доказать, что первый класс Черна голоморфного линейного расслоения над компактным многообразием двойственнен отвечающему расслоению дивизору $D$ в следующем смысле. Дивизор $D \subset X$ порождает гомологический класс $e \in H_{2n-2}(X, \mathbb{C})$. Согласно теореме де Рама, класс $e$ порождает линейный функционал $l_e : H^{2n-2}(X, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Тогда $l_e(\omega) = \int_X c_1(\eta) \wedge \omega$.