Листок 5. Многие переменные

Анализ, 1 курс, **11.12.2013**

Срок сдачи листка 18 декабря.

Максимальная оценка за листок ставится, если по нему набрано не менее 12 баллов. Сдача решения каждой задачи с ноликом или пункта задачи без нолика дает один балл, задачи со звездочкой — два балла. Кроме того, за каждую несданную задачу с ноликом снимется один балл. Задача с ноликом сдается только целиком, в остальных задачах каждый пункт оценивается отдельно.

5⋄1^0 Пусть $\{x_k\}$ – последовательность точек $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:
1) $\lim_{k\to\infty} x_k = x$;
2) $\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0$. Здесь $\rho(x, y)$ – расстояние между точками в $\mathbb{R}^n$;
3) $\lim_{k\to\infty} x_k^i = x^i$;
4) для любого открытого $U \supset x$ существует такое $N \in \mathbb{N}$ что $x_k \in U$ для всех $k > N$.

5⋄2 **а)** Наряду с евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$, которая определяется формулой $||x||_2 = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}$ для $x = (x^1, \dots, x^n)$, введем еще две нормы равенствами $||x||_1 = \sum_i |x^i|$ и $||x||_\infty = \max_i |x^i|$. Докажите, что $||x||_\infty \le ||x||_2 \le ||x||_1 \le n||x||_\infty$.
б) две нормы $||\ ||$ и $||\ ||'$ в линейном пространстве V называются эквивалентными, если существуют постоянные $A, B > 0$ такие, что $||x|| \le A||x||'$ и $||x||' \le B||x||$ для любого $x \in V$. Покажите, что нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда определяемые ими топологии совпадают, иными словами, т.е. для каждого подмножества $X \subset V$ множество X открыто относительно первой нормы тогда и только тогда, когдо оно открыто относительно второй;
в***)** Докажите, что в конечномерном векторном пространстве все нормы эквивалентны.

5⋄3 **а)** Приведите пример связного, но не линейно связного подмножества в R^2;
б) Покажите, что непрерывный образ связного (линейно связного) множества связен (линейно связен)

5⋄4 **а)** Докажите некомпактность единичного шара в пространстве $C[a, b]$;
б***)** Докажите полноту $C[a, b]$.

5⋄5^0 Привести пример
а) не непрерывной (хотя бы в одной точке) функции, непрерывной по каждой переменной;
б) не дифференциируемой (хотя бы в одной точке) функции, у которой существуют все частные производные в этой точке и в ее окрестности;

5⋄6 Привести пример функции, смешанные производные которой в разном порядке не равны.

Пусть $f : U \to \mathbb{R}$ – функция на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Ее производная в точке x_0 вдоль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ называется производная функции $\phi(t) = f(x_0 + t\xi)$ при $t = 0$. Она обозначается $\partial_\xi f(x_0)$.

5⋄7 **а)** Как связаны $\partial_\xi f(x_0)$ и $\partial_{c\xi} f(x_0)$, где $c \in \mathbb{R}$ – фиксированная постоянная? Является ли частная производная $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ производной вдоль какого-нибудь вектора?
б^0**)** Покажите, что если функция f дифференциируема в x_0, то она имеет в точке x_0 производную вдоль любого вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\partial_\xi f(x_0) = Df(x_0)(\xi)$;
в) Пусть $x(t)$ – кривая в $\mathbb{R}^n$, такая, что $x(0) = x_0$ и $\frac{dx^i}{dt}\mid_{t=0} = \xi^i$, $i = 1, \dots, n$. Тогда $\partial_\xi f(x_0) = \frac{df(x(t))}{dt}\mid_{t=0}$.

5⋄8 Кривая на плоскости задана уравнением $F(x, y) = 0$, где $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – дважды дифференциируемая функция; при этом частная производная $\frac{\partial F}{\partial y}$ отлична от нуля в любой точке кривой.
а) Покажите, что кривая может быть представлена как несвязное объединение графиков дифференциируемых функций $y = f_i(x)$ (возможно, с разными областями определения), производные которых удовлетворяют соотношению $y'_x = -F'_x/F'_y$.

б*) В точках перегиба кривой выполнено соотношение на частные производные

$$F''_{xx}{F'_y}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}{F'_x}^2 = 0.$$

5⋄9 Пусть функция $\boldsymbol{F} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ дифференцируема и пусть $\boldsymbol{F}'(x) \neq 0$. Верно ли, что:
а) Существует $\xi \in [0,1]$ такое, что $\boldsymbol{F}(1) - \boldsymbol{F}(0) = \boldsymbol{F}'(\xi)$?
б) Существует $\xi \in [0,1]$ такое, что вектор $\boldsymbol{F}'(\xi)$ параллелен вектору $(\boldsymbol{F}(1), \boldsymbol{F}(0))$?
в) Те же вопросы для $\boldsymbol{F} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$.

5⋄10^0 Функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется однородной степени a, если $f(\lambda x) = \lambda^a f(x)$ для любого $\lambda > 0$.
а) Покажите, что однородная степени a дифференциируемая функция удовлетворяет соотношению Эйлера $\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = af$.
б) Наоборот, из соотношения Эйлера для дифференциируемой функции следует ее однородность.