Алгебра I, осенний семестр 2013 г.

Задачи для семинара 12.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения некоторых задач (по выбору преподавателей и студентов) обсуждаются на семинарах. Остальные задачи рекомендуется решать дома для лучшего понимания лекций. Более сложные задачи отмечены знаком (*) и иногда требуют самостоятельного изучения дополнительных тем.

Задача 1. *Индексом подгруппы* называется число её левых классов смежности.

(а) Докажите, что подгруппа индекса два всегда нормальна.

(б) Пусть G — конечная группа, а p — минимальный простой делитель её порядка. Докажите, что каждая подгруппа в G индекса p нормальна.

Задача 2. Найдите факторгруппу $(\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})/H$, где $H \subset \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ — подгруппа, порождённая двумя векторами с целочисленными координатами (a, b) и (c, d).

Задача 3. Пусть $A, B \subset G$ — две нормальные подгруппы в группе G, такие что $A \cap B = \{e\}$.

(а) Докажите, что $ab = ba$ для любых элементов $a \in A$, $b \in B$.

(б) Докажите, что если $G = AB$, то $G \simeq A \times B$.

Задача 4. Найдите все нормальные подгруппы в группах S_3, S_4 и S_5.

Задача 5. (а) Найдите центр группы $GL_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — поле.

(б) Найдите порядок группы $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ (=факторгруппа $GL_n(\mathbb{F})$ по центру), где $\mathbb{F}$ — конечное поле из q элементов.

Задача 6. Найдите группы (а) $PGL_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$; (б) $PGL_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$; (в) $PGL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Задача 7. Докажите, что группа порядка p^n, где p — простое число, имеет нетривиальный центр.

Задача 8. Докажите, что группа порядка 35 циклическая.

Задача 9. Пусть A — алгебра над полем $\mathbb{F}$, а G — абелева подгруппа порядка n в группе автоморфизмов алгебры A. Обозначим через $A^G \subset A$ *инвариантную подалгебру*:

$$A^G = \{a \in A \mid g(a) = a \text{ для всех } g \in G\}.$$

Докажите, что если $\mathbb{F}$ содержит все корни n-ой степени из единицы, то любой элемент алгебры представляется как сумма $s \le n$ элементов $a_1, \ldots, a_s \in A$, таких что $a_i^n \in A^G$.

Задача 10 (*). Докажите, что правильный 17-угольник можно построить циркулем и линейкой.

Задача 11 (*). Найдите формулу, выражающую корни кубического многочлена через его коэффициенты и использующую только арифметические операции и операцию извлечения квадратного и кубического корня.

Задача 12 (*). Докажите, что для нахождения корня многочлена степени 4 достаточно найти корни некоторого кубического многочлена, а затем корни двух квадратных многочленов.