

1. ПРИКЛАДНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА. МАТЕРИАЛЫ К ЭКЗАМЕНУ.

1.1. Задачи к экзамену.

1. Последовательность  $f_n \in \mathcal{D}$  обобщенных функций сходится к обобщенной функции  $f$ . Докажите, что последовательность  $f'_n$  также сходится; последовательность  $g(x)f_n$  сходится, если  $g(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ .

2. Пусть  $a(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  – гладкая финитная функция, такая, что  $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx = 1$ . Покажите, что

$$\varepsilon^{-n} a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightarrow \delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

3. Вычислите преобразование Фурье обобщенных функций  $F[x]$ ,  $F[\theta(x)x]$ ,  $F[|x|]$ .

4. Докажите равенство

$$a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x), \quad a \in C^1(\mathbb{R})$$

5. Опишите закон движения маятника под действием вынуждающей силы  $F(t)$ ,

$$x'' + x = F(t),$$

считая, что в начальном момент маятник покоится в положении равновесия.

6. Решите краевую задачу  $x'' - x = f(t)$ ,  $x(0) = x(1) = 0$ . Выпишите соответствующую функцию Грина.

7. Вычислите  $e^{tA}$ , где  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с помощью преобразования Лапласа.

8. Найдите решение задачи Коши:  $x'' + 2x' = \varphi(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ , где  $\varphi(t) = e^{-t}$  при  $0 < t < 1$  и  $\varphi(t) = 0$  при  $t > 1$ .

9. Найдите асимптотическое разложение интеграла  $\int_0^\infty \operatorname{arctg} te^{-zt} dt$  при больших  $z$ . В какой области параметра  $z$  справедливо полученное разложение?

10. Найдите а) первый член б) первые три члена асимптотического разложения интеграла  $\int_{-1}^1 \frac{e^{-x^2 t}}{t^2 + 1} dt$  при больших  $x$

11. Перепишите задачу Коши  $x'' + tx' + x = f(t)$ ,  $x(0) = a$ ,  $x'(0) = b$  в виде уравнения на обобщенную функцию с сингулярной правой частью.

12. Вычислите  $(\sin |x| + |\cos x|)''$  в смысле обобщенных функций.

13. Пусть  $F(t, s)$  – функция Грина задачи Коши  $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$  с нулевыми начальными условиями,  $x(0) = x'(0) = 0$ . Покажите, что  $F(t, s) + x_1 F(t, 0) + x_0 F'_s(t, 0)$  есть функция Грина задачи Коши  $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = x_1$ .

14. Пусть  $F(t)$  – фундаментальное решение линейного дифференциального оператора  $L = \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0$ , равное нулю при отрицательных  $t$ . Покажите, что функция  $G(t, s) = F(t - s)$  есть функция Грина задачи Коши  $Lx = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$ .

15. Покажите, что при произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  функция  $u(x) = C_1 + C_2 \eta(x) + \log |x|$  является решением уравнения  $xu'(x) = 1$  в обобщенных функциях (т.е.,  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ). \* Докажите, что это все решения уравнения  $xu'(x) = 1$ .

16. Пусть  $z \in \mathbb{C}$ . Покажите, что для любого комплексного числа  $a \neq 0$  выполнено:  $\delta(az) = \frac{1}{|a|} \delta(z)$ .

17. Пусть обобщенная функция  $\tilde{\delta}_c(z)$  на единичном контуре задана рядом  $\tilde{\delta}_c(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n$ . Пусть функция  $\psi(z)$  при  $|z| = 1$  является предельным значением функции, аналитической внутри единичного круга. Покажите непосредственной подстановкой в

$$(\tilde{\delta}_c(z), \psi(z))_{2\pi} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz} \delta_c(z) \psi(z),$$

что  $(\tilde{\delta}_c(z), \psi(z))_{2\pi} = \psi(1)$ .

18. Найти главный член асимптотики функции  $F(\lambda) = \int_0^\pi x e^{i\lambda \sin x} dx$  при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ .

19. Пусть  $\chi$  – характеристическая функция круга  $|z| \leq 1$ . Докажите, что производная  $\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}}$  есть обобщенная функция на плоскости, ставящая в соответствие каждой основной функции  $\varphi(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  интеграл  $\frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \varphi(z) dz$ .

20. Найдите все возможные регуляризации интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) dx}{|x|^{3/2}}$ .