А. К. Погребков, С. М. Хорошкин

Дополнительные главы прикладных методов анализа

Высшая школа экономики
1-й семестр 2013/2014 гг.

Содержание

1. Лекция 4

1.1. **Теорема Хана–Банаха.** Нам потребуется несколько известных определений и теорем, которые мы приводим здесь для полноты.

Определение 1.1. *Отношение R на множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности (последнее означает, что xRy и yRx влекут за собой равенство $x = y$), называется* ***отношением частичного упорядочения*** *(или просто частичным упорядочением). Если R – частичное упорядочение, то иногда вместо xRy пишут $x \prec y$.*

Определение 1.2. *Если для всех x и y из X или $x \prec y$, или $y \prec x$, то множество X называется* ***линейно упорядоченным****.*

Определение 1.3. *Пусть множество X частично упорядочено отношением $\prec$ и пусть $Y \subset X$. Элемент $p \in X$ называется* ***верхней гранью*** *множества Y, если $y \prec p$ для всех $y \in Y$. Если условия $m \in X$, $m \prec x$ ведут к тому, что $m = x$, то m называется* ***максимальным элементом*** *множества X.*

Лемма 1.1 (Лемма Цорна)**.** *Пусть X – непустое частично упорядоченное множество, такое, что каждое его линейно упорядоченное подмножество имеет в X верхнюю грань. Тогда каждое линейно упорядоченное множество в X обладает некоторой верхней гранью, которая является в то же время максимальным элементом в X.*

Определение 1.4. *Нормированное векторное пространство – это векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{Z}$) вместе с функцией $\|\cdot\|$ из V в $\mathbb{R}$ (**нормой**), удовлетворяющей условиям:*
1. *для всех v из V норма $\|v\| \geq 0$;*
2. *$\|v\| = 0$ тогда и только тогда, когда $v = 0$;*
3. *для всех v из V и α из $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ всех $\|v\|$;*
4. *для всех v и w из V выполнено неравнество треугольника: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.*

Определение 1.5. *Полное нормированное линейное пространство называется* ***банаховым пространством****.*

Банаховы пространства обладают многими свойствами эвклидовых: это векторные пространства, норма в них опеределяет понятие расстояния, а всякая последовательность Коши имеет предел.

В описании обобщенных функций банаховы пространства возникают следующим образом. Введем в $\mathscr{S}$ счетное число норм, определенных как

$$\|\phi\|_p = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \alpha\leq p}} (1 + |x|^2)^{p/2} |\partial_x^\alpha \phi(x)|, \quad p = 0, 1, \dots. \tag{1.1}$$

Очевидно, что

$$\|\phi\|_0 \leq \|\phi\|_1 \leq \|\phi\|_2 \leq \dots, \tag{1.2}$$

а сходимость в $\mathscr{S}$ можно эквивалентно определить следующим образом: последовательность функций ϕ_1, ϕ_2, ... из $\mathscr{S}$ сходится к нулю, $\phi_k \to 0$ в $\mathscr{S}$ при $k \to \infty$, если для всех $p = 0, 1, \dots$ последовательности $\|\phi_k\|_p \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть $\mathscr{S}_p$ означает пополнение $\mathscr{S}$ по p-ой норме. Каждое $\mathscr{S}_p$ – банахово пространство и справедливы вложения:

$$\mathscr{S}_0 \supset \mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_2 \supset \dots,$$

причем каждое вложение $\mathscr{S}_{p+1} \subset \mathscr{S}_p$ непрерывно в силу (1.2). Можно доказать, что это вложение вполне непрерывно (компактно), т.е. из всякого бесконечного ограниченного множества в $\mathscr{S}_{p+1}$ можно выбрать последовательность, сходящуюсь в $\mathscr{S}_p$. Отсюда вытекает, что $\mathscr{S}$ – полное пространство и $\mathscr{S} = \bigcap_{p\geq 0} \mathscr{S}_p$.

Теорема 1.1 (Теорема Лорана Шварца)**.** *Пусть M' – слабо ограниченное множество функционалов из $\mathscr{S}'$, т.е. $|(f,\phi)| < C_\phi$ для всех $f \in M'$ и $\phi \in \mathscr{S}$. Тогда существуют такие числа $K \geq 0$ и $m \geq 0$, что*

$$|(f,\phi)| \leq K\|\phi\|_m, \quad f \in M', \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{1.3}$$

Доказательство. Если неравенство (1.3) несправедливо, то найдутся последовательности $\{f_k\}$ – функционалов из M' и ϕ_k – функций из $\mathscr{S}$ такие, что

$$|(f_k,\phi_k)| \geq k\|\phi_k\|_k, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{k}\|\phi_k\|_k}, \quad k = 1,2,\ldots$$

стремится к 0 в $\mathscr{S}$, ибо при $k \geq p$:

$$\|\psi_k\|_p = \frac{\|\phi_k\|_p}{\sqrt{k}\|\phi_k\|_k} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Последовательность функционалов $\{f_k\}$ ограничена на каждой основной функции ϕ из $\mathscr{S}$. Поэтому для нее $(f_k,\psi_k) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, неравенство (1.3) дает

$$|(f_k,\psi_k)| = \frac{\|(f_k,\phi_k)\|}{\sqrt{k}\|\phi_k\|_k} \geq \sqrt{k}.$$

Полученное противоречее и доказывает теорему.

Следствие 1.1. *Всякая обобщенная функция умеренного роста имеет конечный порядок, т.е. допускает продолжение как линейный непрерывный функционал, принадлежащий (наименьшему) сопряженному пространству $\mathscr{S}'_m$, при этом неравенство (1.3) принимает вид*

$$|(f,\phi)| \leq \|f\|_{-m}\|\phi\|_m, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{1.4}$$

где $\|f\|_{-m}$ – норма функционала f в $\mathscr{S}'_m$, m – порядок f.

Таким образом спряведливы соотношения

$$\mathscr{S}'_0 \subset \mathscr{S}'_1 \subset \mathscr{S}'_2 \supset \ldots, \qquad \mathscr{S} = \bigcup_{p\geq 0}\mathscr{S}_p.$$

Теорема 1.2 (Теорема Хана–Банаха)**.** *Пусть X – вещественное векторное пространство, p – вещественная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ для всех $x,y \in X$, $\alpha \in [0,1]$. Предположим, что λ – линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x) \leq p(x)$ для всех $x \in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ, определенный на X, такой, что $\Lambda(x) \leq px$ для всех $x \in X$ и $\Lambda(x) = \lambda(x)$ для всех $x \in Y$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z \in X$, но $z \notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X.

Пусть $\widetilde{Y}$ – подпространство, натянутое на Y и z. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – продолжение λ на $\widetilde{Y}$, оно будет описано, коль скоро мы определим $\widetilde{\lambda}(z)$, т.к.

$$\widetilde{\lambda}(az + y) = a\widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y).$$

Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и пусть $\alpha, \beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) = \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha+\beta)\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\Big) \leq \\ \leq (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1 - \alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2 + \beta z)\Big) \leq \\ \leq \beta p(y_1 - \alpha z) + \alpha p(y_2 + \beta z).\end{aligned}$$

Значит, для всех $\alpha, \beta > 0$ и $y_1, y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}\big[-p(y_1 - \alpha z) + \lambda(y_1)\big] \leq \frac{1}{\beta}\big[p(y_2 + \beta z) - \lambda(y_2)\big],$$

а потому существует такое вещественное a, что

$$\sup_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha}\big[-p(y - \alpha z) + \lambda(y_1)\big] \leq a \leq \inf_{\substack{y \in Y \\ \alpha > 0}} \frac{1}{\alpha}\big[p(y + \alpha z) - \lambda(y)\big].$$

Положим тогда $\widetilde{\lambda}(z) = a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\widetilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ при всех $x \in Y$. Итак, мы показали, что λ за один шаг может быть продолжено на одно измерение.

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Цорна. Пусть $\mathcal{E}$ – набор расширений e функционала λ, удовлетворяющих условию $e(x) \leq p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в $\mathcal{E}$ частичное упорядочение, положив $e_1 \prec e_2$, если e_2 определено на большем множестве, чем e_1 и $e_2(x) = e_1(x)$ там, где они оба определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$; пусть X_α – то подпространство, на котором определено e_α. Определим e на $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$, положив $e(x) = e_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. Очевидно, что $e_\alpha \prec e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$ имеет верхнюю грань. В силу леммы Цорна $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент Λ, определенный на некотором множестве X' и удовлетворяющий условию $\Lambda(x) \leq p(x)$ при $x \in X'$. Но X' должно совпадать со всем X, так как в противном случае мы могли бы продолжить Λ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это противоречит максимальности Λ, должно быть $X = X'$. Значит расширение Λ определено всюду.

Литература к лекции 4: М.Рид, Б.Саймон "Методы современной математической физики", том 1, "Функциональный анализ"; В.С.Владимиров "Обобщенные функции в математической физике".

2. Лекция 5

2.1. **Теорема Хана–Банаха, комплексный случай.**

Теорема 2.1. *Пусть X – комплексное векторное пространство, p – вещественная положительная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+\beta y) \leq |\alpha|p(x)+|\beta|p(y)$ при любых $x, y \in X$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\alpha| + |\beta| = 1$. Пусть λ – комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал Λ, определенный на X, удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in X$ и такой, что $\Lambda(x) = \lambda(x)$ при $x \in Y$.*

Доказательство. Положим $\ell(x) = \mathrm{Re}\{\lambda(x)\}$, так что ℓ – вещественно линейный функционал на Y и, поскольку $\ell(ix) = \mathrm{Re}\{\lambda(ix)\} = \mathrm{Re}\{i\lambda(x)\} = -\operatorname{Im}\lambda(x)$, то $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Т.к. ℓ – вещественно линеен и $p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$, то существует вещественно линейное расширение L на все X, удовлетворяющее условию $L(x) \leq p(x)$. Положим $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$. По построению это – вещественно линейный функционал, являющийся расширением функционала λ. Но поскольку $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = i\Lambda(x)$, то Λ – комплексно линеен. Осталось доказать, что $|\Lambda(x)| \leq p(x)$. Заметим, что $p(\alpha x) \leq p(x)$ для любого α такого, что $|\alpha| = 1$. Обозначим $\theta = \mathrm{Arg}(\Lambda(x))$. Тогда в силу равенства $\mathrm{Re}\,\Lambda = L$, имеем:

$$\begin{aligned}|\Lambda(x)| &= e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \mathrm{Re}\,\Lambda(e^{-i\theta}x) = \\ &= L(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) \leq p(x),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

2.2. **Структура обобщенных функций медленного роста.**

Теорема 2.2. *Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то существует непрерывная функция g медленного роста на $\mathbb{R}^n$ и целое число $m \geq 0$ такие, что $f(x) = D_1^m \ldots D_n^m g(x)$.*

Доказательство. Проведем его для случая $n = 1$. По теореме Шварца существуют числа K и p такие, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$|(f, \varphi)| \leq K\|\varphi\|_p \leq K \max_{\alpha \leq p} \int dx \left|\frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)]\right|,$$

так что

$$|(f, \varphi)| \leq K \max_{\alpha \leq p} \left\|\frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)]\right\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Положим $\psi_\alpha = \dfrac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)]$. Это сопоставляет каждой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ набор $\{\psi_\alpha\}$, т.е. мы имеем отображение $\varphi \to \{\psi_\alpha\}$ из пространства $\mathscr{S}$ в пространство $\oplus_{\alpha \leq p}\mathcal{L}^1$ с нормой $\|\{f_\alpha\} = \max_{\alpha \leq p}\|f_\alpha\|_{\mathcal{L}^1}$. На линейном подмножестве $\{\{\psi_\alpha\}, \varphi \in \mathscr{S}\}$ пространства $\oplus_{\alpha \leq p}\mathcal{L}^1$ введем линейный функционал f^* посредством равенства $(f^*, \{\psi_\alpha\}) = (f, \varphi)$. В силу доказанного выше

$$|(f^*, \{\psi_\alpha\})| = |(f, \varphi)| \leq K \max_{\alpha \leq p}\|\psi_\alpha\|_{\mathcal{L}^1} \leq K\|\{\psi_\alpha\}\|,$$

так что функционал f^* непрерывен. Тогда в силу теорем Хана–Банаха и Ф. Рисса существует вектор функция $\chi_\alpha \in \oplus_{\alpha \leq p}\mathcal{L}^\infty$ такая, что

$$(f^*, \{\psi_\alpha\}) = \sum_{\alpha \leq p} \int dx \chi_\alpha(x)\psi_\alpha(x).$$

(Здесь $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}))$ – множество комплексно значных измеримых функций на $\mathbb{R}$, таких что $|f(x)| \leq M$ почти всюду по мере Лебега при некотором $M < \infty$. Норма $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$ – наименьшее из таких

M. Пространство $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}))$ банахово.) Итак, для любого $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$(f,\varphi) = \sum_{\alpha\le p}\int dx\, \chi_\alpha(x)\frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] =$$

$$= \sum_{\alpha\le p}\int dx g_\alpha(x)\phi^{\alpha+2}(x).$$

Здесь добавлена одна производная в $\varphi^{(\alpha+2)}$, чтобы обеспечить непрерывность функции g_α, являющейся первообразной факторов $\varphi^{(\alpha+1)}(x)$ в первой строчке. Окончательно получаем:

$$f(x) = \frac{d^m}{dx^m}g(x), \text{ где } m = p+2,$$

что и требовалось доказать.

Литература к лекции 5: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”; В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”.

3. Лекция 6. Периодические обобщенные функции

3.1. **Основные определения и свойства.** Определим пространство $\mathscr{D}'_T$, где $T>0$, как подмножество $f(x)\in\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, таких что $f(x+T)=f(x)$ (в смысле обобщенных функций). Стандартным примером периодических обобщенных функций является периодическая дельта-функция:

$$\delta_T(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(x-nT). \tag{3.1}$$

Поскольку для любого $\phi\in\mathscr{S}$ имеем $(\delta_T(x),\phi(x))=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\phi(nT)$, то $\delta_T(x)\in\mathscr{S}'$. для дальнейшего нам потребуется разложение единицы. Введем неотрицательную четную функцию $e_T(x)\geq 0$, причем $e_T(x)\in\mathscr{D}$ и $\operatorname{supp}e_T\subset\left(-\frac{3T}{4},\frac{3T}{4}\right)$. Более того, потребуем чтобы $e_T(x)=1$ при всех $-\frac{T}{4}<\frac{T}{4}$, и $e_T(x-T)=1-e_T(x)$ при $\frac{T}{4}<\frac{3T}{4}$. Легко видеть, что тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_T(x+nT)=1, \tag{3.2}$$

при всех $x\in\mathbb{R}$. Это разложение единицы позволяет доказать, что для любой $f\in\mathscr{D}'_T$ выполнено

$$f=(e_Tf)*\delta_T. \tag{3.3}$$

Действительно, в силу (3.2):

$$\begin{aligned}f(x)=f(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}e_T(x+nT)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x)e_T(x+nT)=\\=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+nT)e_T(x+nT)=(e_Tf)*\delta_T,\end{aligned}$$

где последнее равентство следует из замечания, что для любой обобщенной функции g, для которой существует ее свертка с δ_T по (3.1) выполнено равенство $(g*\delta_T)(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}g(x+nT)$. Доказанное равенство означает, что $\mathscr{D}'_T\in\mathscr{S}'$. Заметим, что в силу его $\delta_T=(e_{T\delta_T})*\delta_T$, хотя свертка $\delta_T*\delta_T$ не существует.

Рассмотрим специальный случай, когда обобщенная функция задется функцией локально интегрируемой: $f\in\mathcal{L}^1_{\text{loc}}\cap\mathscr{D}'_T$. Пусть основная функция принадлежит пространству $\phi\in C^\infty{}_T$, т.е. пространству гладких бесконечно дифференцируемых периодических функций с периодом T. Тогда в силу (3.2) имеем:

$$\begin{aligned}\int_0^T dx\,f(x)\phi(x)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^T dx\,f(x)e_T(x+nT)\phi(x)=\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{nT}^{(n+1)T}dx\,f(x-nT)e_T(x)\phi(x-nT)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{nT}^{(n+1)T}dx\,f(x)e_T(x)\phi(x)=\\&=\int dx\,f(x)e_T(x)\phi(x).\end{aligned}$$

Поэтому естественно положить $\forall f\in\mathscr{D}'_T$ и любой основной функции $\phi\in C^\infty{}_T$, что

$$(f,\phi)_T=(f,e_T\phi). \tag{3.4}$$

Из предыдущего замечания следует, что в случае, когда f локально интегрируема, это определение корректно, поскольку не зависит от выбора функции e_T в разложении единицы (3.2). Однако в общем случае этот факт следует доказывать. Пусть функция e'_T задает какое-то другое разложение единицы. Тогда, последовательно используя (3.3), свойства свертки, равенство

(3.1), равенство (3.2) для функции e'_T, получаем:

$$(f, e'_T\phi) = ((e_T f) * \delta_T, e'_T\phi) = \int dx \int dy\, e_T(x) f(x) \delta_T(y) e'_T(x+y)\phi(x+y) =$$
$$= \int dx\, e_T(x) f(x) \int dy\, \delta_T(y) e'_T(x+y)\phi(x+y) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx\, e_T(x) f(x) e'_T(x-nT)\phi(x-nT) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx\, e_T(x) f(x) e'_T(x-nT)\phi(x) = (f, e_T\phi),$$

что и следовало доказать. Отметим, что в силу этого определения:

$$(e^{im\omega x}, e^{in\omega x}) = T\delta_{m+n,0}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{3.5}$$

где δ_n – символ Кронекера.

3.2. **Ряд Фурье.** Здесь для удобства мы положим $T = 2\pi$.

Теорема 3.1. *Для любой обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'_T$ ряд Фурье $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$, где*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}(f, e^{-inx})_{2\pi} \text{ – коэффициенты Фурье,} \tag{3.6}$$

сходится к f в $\mathscr{S}'$, т.е.

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}. \tag{3.7}$$

Прежде, чем доказывать эту теорему рассмотрим обычный ряд Фурье для гладкой функции заданной равенством $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4\pi}$ на интервале $0 \le x \le 2\pi$ и повторенной периодически с периодом 2π. По (3.6)

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3}, & n = 0, \\ -\frac{1}{n^2}, & n \ne 0. \end{cases}$$

Итак, $f(x) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2\pi}\sum_{n\ne 0} \dfrac{e^{inx}}{n^2}$. Производная $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2\pi}$ на интервале $0 \le x \le 2\pi$ и передиочески повторяется на всей оси, а дифференцируя ряд, получаем: $f'(x) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{1}{2\pi}\sum_{n\ne 0} \dfrac{e^{inx}}{n^2}$. Функция $f'(x)$ разрывна, а потому $f''(x) = -\dfrac{1}{2\pi} + \delta_{2\pi}(x)$. Дифференцируя ряд еще раз, получаем ряд Фурье для периодической дельта-функции:

$$\delta_{2\pi}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} \tag{3.8}$$

по построению, сходящийся в $\mathscr{S}'$.

Доказательство теоремы легко следует из равенств (3.3) и (3.4):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(e_T f) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_T f) * e^{inx} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx\, e^{in(x-y)} e_T(y) f(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} c_n(f).$$

Таким образом, каждая обобщенная функция из $\mathscr{D}'_T$ однозначно определяется своими коэффициентами Фурье. Нетрудно показать, что для обобщенных функций выполнено равенство Парсеваля $(f, \phi)_T = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_{-n}(\phi)$, а ряд Фурье можно почленно дифференцировать: $c_n(f^{(\alpha)}) = (in)^\alpha c_n(f)$.

3.3. **Обобщенные функции на единичном контуре.** Пусть $\phi(x) \in C^{\infty}_{2\pi}$. Положим $z = e^{ix}$, $0 \le x \le 2\pi$. Введем функцию $\psi(z)$ комплексной переменной на единичном контуре, $|z| = 1$, посредством $\psi(e^{ix}) = \phi(x)$. Понятно, что если $\psi(z)$ – бесконечно дифференцируемая функция на единичном круге, то $\phi(x) \in C^{\infty}_{2\pi}$. В частности, для периодической дельта-функции имеем:

$$(\delta_{2\pi}, \psi)_{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int dx \delta(x - 2\pi n) e_{2\pi}(x)\psi(x) = \psi(1).$$

Аналогично, мы любой обобщенной функции $f(x) \in \mathscr{D}'_{2\pi}$ сопоставляем обобщенную функцию $f_c(z)$ (c от слова contour) на единичном круге:

$$(f(x), \phi(x))_{2\pi} = (f_c(z), \psi(z))_{2\pi} \tag{3.9}$$

Если функция $f(x)$ локально интегрируема, то локально интегрируема и функция $f_c(z) = f(x)$, $z = e^{ix}$, причем

$$(f_c(z), \psi(z))_{2\pi} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz} f_c(z)\psi(z), \tag{3.10}$$

а для произвольной обобщенной функции из $\mathscr{D}'_{2\pi}$ правую часть следует понимать как обозначение левой, определенной по (3.4) и (3.9).

Ряд Фурье для обобщенной функции, т.е. равенства (3.6) и (3.7), принимает вид:

$$f_c(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) z^n, \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}(f_c, z^{-n})_{2\pi} \equiv \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} f_c(z)\psi(z) \tag{3.11}$$

В частности по (3.8)

$$\delta_c(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n.$$

Из этого равенства следует аналог формулы Сохоцкого–Вейрштрассе:

$$\delta_c(z) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(ze^{-\epsilon})^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(ze^{\epsilon})^{-n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\left(\frac{1}{z-e^{-\epsilon}} - \frac{1}{z-e^{\epsilon}}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z-1^-} - \frac{1}{z-1^+}\right)$$

где по аналогии со случаем обобщенных функций на вещественной оси мы ввели обобщенные функции

$$\frac{1}{z-1^{\pm}} = \lim_{\epsilon\to\pm0}\frac{1}{z-e^{\epsilon}},$$

являющиеся пределами функций аналитических внутри и вне единичного контура, соответственно.

Литература к лекции 6: В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”.

4. Лекция 7

5. Формула Эйлера–Маклорена

Идея оценки интеграла Фурье – использование интегрирования по частям способом, противоположным естественному: мы заменяем интеграл, где подинтегральная функция содержит исходно исследуемую $f(t)$ на интеграл, содержащий $f'(t)$. Аналогичный прием используется для вычисления сумм:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(f(k) - f(k+1)) + (n-1)f(n)$$

(преобразование Абеля). Эйлер использовал эти два приема одновременно.

Рассматривается следующая задача. Фиксируем целое число a и функцию вещественного переменного $f(x)$. Исследуем отличие суммы

$$S_n = \frac{1}{2}f(a) + f(a+1) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

от интеграла $\int_a^n f(x)dx$. Соответствующую разность можно представить интегралом

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n \omega_1(x)f'(x)dx, \qquad \text{где} \quad \omega_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}. \tag{5.1}$$

В самом деле, для всякого целого j имеем, интегрируя по частям,

$$\int_j^{j+1} \left(x - j - \frac{1}{2}\right) f'(x)dx = \frac{f(j) + f(j+1)}{2} - \int_j^{j+1} f(x)dx.$$

Суммируя это тождество по j, приходим к (5.1). Другой способ вывода - использование интеграла Стильтьеса. Имеем

$$\int_a^n f(x)d[x] = f(a+1) + \ldots + f(n), \qquad \int_a^n f(x)d[-x] = -f(a) - \ldots - f(n-1),$$

так что

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \int_a^n f(x)d\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right).$$

Беря интеграл Стильтьеса по частям, получим

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = -\int_a^n f'(x)\left(\frac{[x] - [-x])}{2} - x\right)dx = -\int_a^n f'(x)\left([x] - x + \frac{1}{2}\right)dx$$

Продолжим, начиная с формулы (5.1), процесс интегрирования по частям. Заметим. что функция $\omega_1(x)$ периодична с периодом 1 и ее интеграл по периоду нулевой:

$$\omega_1(x) = \omega_1(x+1), \qquad \int_0^1 \omega_1(x)dx = 0, \qquad \text{и} \qquad \omega_1(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{при} \qquad 0 \le x < 1.$$

Поэтому существует (теперь уже непрерывная) периодическая функция $\omega_2(x)$ с нулевым интегралом по периоду, такая. что $\omega_2'(x) = \omega_1(x)$. Нетрудно видеть, что

$$\omega_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

Интегрирование (5.1) по частям дает равенство

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \omega_2(x)f'(x)|_a^n - \int_a^n \omega_2(x)f''(x)dx \tag{5.2}$$

и, более общо,

$$S_n - \int_a^n f(x)dx = \sum_{s=2}^{m} \omega_s(x)f^{(s-1)}(x)|_a^n + (-1)^{m+1}\int_a^n \omega_m(x)f^{(m)}(x)dx \tag{5.3}$$

Это и есть формула Эйлера–Маклорена в простейшем варианте.

Периодические с периодом 1 функции $\omega_k(x)$ находятся рекуррентно из условий

$$\omega'_{k+1}(x) = \omega_k(x), \qquad \int_0^1 \omega_k(x)dx = 0.$$

Для более явного описания функций $\omega_k(x)$ соберем их в производящую функцию

$$G(x,t) = \sum_{k\geq 0} \omega_k(x)t^k, \qquad 0 \leq x < 1$$

положив $\omega_0(x) = 1$. Тогда условие $\omega'_{k+1}(x) = \omega_k(x)$ запишется в виде

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = \sum \omega'_k(x)t^k = \sum \omega_{k-1}t^k = tG(x,t).$$

Дифференциальное уравнение $\frac{\partial G(x,t)}{\partial x} = tG(x,t)$ легко решается:

$$G(x,t) = g(t)e^{tx},$$

где $g(t)$ - произвольная функция. Ее позволяет найти соотношение $\int_0^1 \omega_k(x)dx = \delta_{k,0}$, которое в терминах G имеет вид $\int_0^1 G(x,t)dx = 1$:

$$\int_0^1 g(t)e^{tx}dx = \frac{g(t)}{t}e^{tx}\Big|_0^1 = \frac{g(t)\left(e^t-1\right)}{t} = 1,$$

откуда $g(t) = \frac{t}{e^t-1}$ и $G(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t-1}$. В принятых сейчас обозначениях (раньше использовали также нормировку без факториалов) функция $G(x,t)$ есть производящая функция многочленов Бернулли $B_k(x)$

$$G(x,t) = \sum_{k\geq 0} B_k(x)\frac{t^k}{k!}, \qquad \text{так что} \qquad \omega_k(x) = \frac{B_k(x-[x])}{k!}.$$

Более употребительные числа Бернулли определяются как значения полиномов Бернулли в нуле, $B_k = B_k(0)$, так что $t/(e^t-1)$ является их производящей функцией:

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}t^n.$$

Полиномы Бернулли выражаются через числа Бернулли. В самом деле, из вида соответствующих производящих функций следует равенство формальных рядов по t: $e^{tx}\sum_k B_k t^k/k! = \sum_n B_n(x)t^n/n!$, т.е.,

$$\left(\sum_l \frac{(xt)^l}{l!}\right)\left(\sum_k B_k\frac{t^k}{k!}\right) = \sum_n B_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

откуда

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} B_{n-j}x^j\binom{n}{j}.$$

Далее, производящая функция $G(x,t)$ инвариантна относительно замены $x \leftrightarrow 1-x$, $t \leftrightarrow -t$, поэтому $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, в частности, $B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$. Поскольку функции $\omega_k(x)$ периодичны и непрерывны при $n \geq 3$, заключаем, что $B_{2k+1} = 0$ при $k \geq 1$. Первые значения чисел Бернулли: $B_0 = 1$, $B_1 = -\dfrac{1}{2}$, $B_2 = \dfrac{1}{12}$, $B_3 = 0$, $B_4 = \dfrac{1}{30}$. Теперь формулы (5.2) и (5.3) можно переписать следующим образом:

$$(5.4) \qquad \sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \frac{B_2(x-[x])}{2}f''(x)dx,$$

$$(5.5) \qquad \sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \sum_{s=2}^{m}\frac{B_{2s}}{(2s)!}\left(f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(a)\right) + R_m,$$

где остаток

$$R_m = -\int_a^n \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx.$$

5.1. **Применения формулы Эйлера–Маклорена.** Прежде всего хотелось бы иметь хоть какую-нибудь оценку остаточного члена R_m, точнее, подинтегрального выражения $\frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!}$. Грубая оценка получается из изучения особенностей производящей функции $G(x,t)$. Эта функция имеет полюса по t в точках $t = 2\pi ik$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Это означает, что радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k\geq 0} \frac{B_k(x)}{k!} t^k$ равен 2π, так что для любого r, $0 < r < 1$ выражение $\frac{B_k(x)}{k!}(2\pi r)^k$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, имеем оценку

$$\left| \frac{B_k(x)}{k!} \right| < C(r) \frac{1}{(2\pi r)^k}$$

для любого r, $0 < r < 1$.

Формулу Эйлера–Маклорена естественно применять для функций $f(x)$, производные $f^{(n)}(x)$ которых убывают с ростом n. Допустим, мы находимся ровно в такой ситуации и хотим оценить асимптотику суммы $\sum_a^n f(j)$ по параметру n. Тогда слагаемые $\dfrac{B_2 s}{(2s)!} f^{(2s-1)}(a)$ собираются в сумму, не зависящую от n. Имеется простой изящный прием, позволяющий избавиться от них сразу. Предположим, например, что уже $\int_a^{+\infty} f''(x)dx$ абсолютно сходится. Преобразуем формулу (5.4) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\sum_a^n f(j) &= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^n \omega_2(x) f''(x)dx \\
&= \int_a^n f(x)dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(n)) + \frac{1}{12}(f'(n)-f'(a)) - \int_a^\infty \omega_2(x) f''(x)dx + \int_n^\infty \omega_2(x) f''(x)dx \\
&= \int_a^n f(x)dx + \frac{f(n)}{2} + \frac{f'(n)}{12} + C + \int_n^\infty \omega_2(x) f''(x)dx,
\end{aligned}$$

где

$$C = \frac{f(a)}{2} - \frac{f'(a)}{12} - \int_a^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2} f''(x)dx. \tag{5.6}$$

Теперь будем описанным ранее методом интегрировать $\int_n^\infty \omega_2(x) f''(x)dx$ по частям:

$$\int_n^\infty \omega_2(x) f''(x)dx = \omega_3(n) f^{(3)}(n) - \int_n^\infty \omega_3(x) f^{(3)}(x)dx$$

и т.д. В результате получим формулу

$$\sum_a^n f(j) = \int_a^n f(x)dx + C + \frac{f(n)}{2} + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m,$$

где C задано соотношением (5.6) и

$$R_m = \int\limits_n^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{(2m)!} f^{(2m)}(x)dx.$$

Пример. Асимптотическая оценка $n!$ (точнее, $\log n!$). Представим $\log n!$ в виде суммы $\log n! = \log 1 + \log 2 + \ldots + \log n$ и применим предыдущие рассуждения для функции $f(x) = \log x$. Ее производные имеют вид $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. В частности,

$\int_1^\infty f''(x)dx = -\int_1^\infty 1/x^2 dx$ сходится. Поэтому

$$\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= (x\log x - x)\Big|_1^n + \frac{1}{2}\log n + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)!} f^{(2s-1)}(n) + R_m$$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + 1 + C + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + R_m,$$

где

$$C = -\frac{1}{12} + \int_1^\infty \frac{B_{2s}(x-[x])}{(2x^2)}dx, \qquad R_m = \int\limits_n^\infty \frac{B_{2m}(x-[x])}{2mx^{2m}}dx.$$

Интегрируя по частям, замечаем, что $R_m = O(1/n^{2m})$. Для постоянной C можно получить другое выражение, заметив, что в силу описанной выше формулы

$$C + 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n + n\right),$$

и, применив формулу Стирлинга для $n! = \Gamma(n+1)$,

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + o(1)\right),$$

получим, что $C + 1 = \frac{1}{2}\log 2\pi$, и в итоге полное асимптотическое разложение

$$\log n! = \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi + \sum_{s=1}^m \frac{B_{2s}}{(2s)(2s-1)n^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2m}}\right).$$

5.2. **Ряд Стирлинга для** $\log\Gamma(z)$**.** . Подобным же образом можно получить полное асимптотическое разложение для логарифма Γ-функции Эйлера. Воспользумся, к примеру, определением Эйлера:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Тогда

$$\log\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\Big((\log 1 + \ldots \log n) - (\log z + \ldots \log(z+n)) + z\log n\Big). \tag{5.7}$$

Воспользуемся для каждой из сумм интегральным представлением (5.4):

$$\log 1 + \ldots + \log n = \int_1^n \log x dx + \frac{1}{2}(\log 1 + \log n) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx,$$

$$\log z + \ldots + \log(z+n) = \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}(\log z + \log(z+n)) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{z}\right) + \int_0^n \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx.$$

Подставляя эти представления в (5.7), получим

$$\log\Gamma(z) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \log x dx - \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\log\frac{n}{z(n+z)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)} - \frac{z-1}{z}\right) + z\log n\right)$$
$$+ C - \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx,$$

где $C = \int_1^n \frac{B_2(x-[x])}{2x^2}dx$.

Вычислим вначале предел во второй строке последней формулы:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n \log x dx - \int_0^n \log(x+z)dx + \frac{1}{2}\left(\log\frac{n}{z(n+z)}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{z}{n(z+n)} - \frac{z-1}{z}\right) + z\log n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((x\log x - x)\Big|_1^n - ((x+z)\log(x+z) - (x+z))\Big|_{x=0}^{x=n} - \frac{1}{2}\log z + z\log n + \frac{1}{12z} - 1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\log n - (n+z)\log(n+z) + z\log z - \frac{1}{2}\log z + z\log n + \frac{1}{12z}\right) =$$

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\log\frac{n+z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\log\left(1+\frac{z}{n}\right) =$$

$$\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + \frac{1}{12z} - \lim_{n\to\infty}(n+z)\frac{z}{n} = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{12z}.$$

Оставшийся интеграл

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\omega_2(x)}{(x+z)^2}dx$$

оценим привычным способом интегрирования по частям с применением функций $\omega_k(x)$:

$$F(z) = -\sum_{s=2}^{m} \frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right),$$

так что

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + C + \sum_{s=2}^{m}\frac{B_{2s}}{2s(2s-1)z^{2s-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2m}}\right) \tag{5.8}$$

где $C = \frac{1}{2}\log 2\pi$, например, из того же сравнения с формулой Стирлинга для $\Gamma(z)$.

Область параметра z, в которой работает асимптотическое разложение (5.8), определяется областью применимости асимптотической оценки интеграла

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{B_2(x-[x])}{2(x+z)^2}dx$$

при больших z. Для этого знаменатель $x+z$ должен быть равномерно отделен от нуля, т.е., асимптотическое разложение Стирлинга для $\log\Gamma(z)$ справедливо в области $|\arg z| < \pi - \delta$ для сколь угодно малого положительного δ.